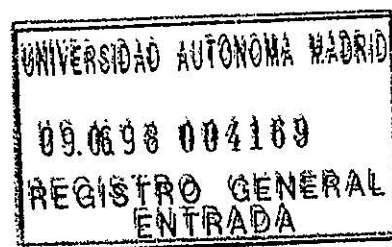


47
SC
C
1691

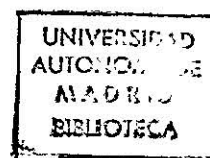
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID.
FACULTAD DE CIENCIAS.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.



Geometría de curvas racionales en Grassmannianas.

Daniel Ortega Rodrigo

R.B.C 67.736



Tesis doctoral dirigida por D. Rafael Hernández García.
Madrid, junio de 1998.

A Lali, siempre a mi lado.

A mi familia.

Índice

Introducción	ii
1 Esquema Quot	1
1.1 Grassmannianas de cocientes	1
1.2 Esquema de morfismos	4
1.3 Esquema Quot	5
1.4 Haces de torsión	6
1.5 Subvariedades en la Grassmanniana	13
1.6 Acciones de grupos	16
2 Anillo de Chow: rangos	19
2.1 Algunos resultados de Bialynicki-Birula	19
2.2 Números de Betti	20
2.2.1 La aplicación h	22
3 Bases para los grupos $A^k(R)$ con $k < d$	26
3.1 Aplicación de evaluación	27
3.1.1 Extensión de la aplicación de evaluación	27
3.1.2 Propiedades de \tilde{Q}	29
3.2 Cerrados básicos de dimensión alta	33
3.3 Cerrados básicos de dimensión baja	40
3.4 Bases en $A^*(R)$	48
3.4.1 Argumento de intersección	51
3.4.2 Matrices de intersección	53
Apéndice: Números de Betti	60
.1 Números de Betti de R_P	61
.2 Números de Betti de R_G	71
Apéndice: Funciones generatrices	76

Introducción

Los esquemas de morfismos $\text{Mor}(X, Y)$ entre dos esquemas proyectivos, X e Y , son objeto natural de estudio en Geometría Algebraica. Se construyen como una aplicación de la teoría de esquemas de Hilbert de A. Grothendieck ([Gro]).

El caso particular en que Y es una variedad de Grassmann G y X es una curva ha sido especialmente estudiado. El motivo principal es que gracias a la propiedad universal de las variedades de Grassmann, los morfismos de X en G se corresponden con ciertas sucesiones exactas de fibrados en X .

Además, tales morfismos pueden interpretarse como familias de espacios lineales y dan lugar a una geometría muy rica.

En esta memoria nos interesamos por la topología de la variedad de morfismos de un grado fijo d , en el caso en que $X = \mathbb{P}^1$ e $Y = G$. El grado de un morfismo de una curva en G es el grado de la imagen inversa del generador amplio de $\text{Pic}(G)$.

El punto de partida en nuestro estudio es el artículo de S.A.Strømme “*On parametrized rational curves in Grassmann varieties*” ([Str]), en el que se calculan los números de Betti de una compactificación natural R de la variedad $\text{Mor}(\mathbb{P}^1, G)$, y se da una descripción mediante generadores y relaciones (que no se calculan explícitamente) de su anillo de cohomología.

Nuestro objetivo es describir explícitamente bases, sobre \mathbb{Z} , de los grupos de cohomología dando, por tanto, mayor precisión a la descripción de la estructura aditiva de la cohomología dada por Strømme.

Como una consecuencia de su estudio, Strømme probó que los grupos de cohomología de R con coeficientes en \mathbb{Z} , son isomorfos a los correspondientes grupos de Chow, y que éstos son grupos libres.

Para dar una idea de los resultados obtenidos, describimos a continuación el caso de codimensión uno en la variedad G de rectas del espacio proyectivo \mathbb{P}^3 .

En este caso, la dimensión de R es $4d+4$, donde d es el grado fijado en la variedad de morfismos (que supondremos al menos 2). El número de generadores de $A^1(R)$, y por dualidad de $A^{4d+3}(R)$, es en este caso igual a 2. En el texto describimos las bases para ambos grupos de manera geométrica. Para estas descripciones se usa fuertemente la aplicación de evaluación natural $ev : \mathbb{P}^1 \times \text{Mor}(\mathbb{P}^1, G) \rightarrow G$. Esta evaluación describe curvas en G . La aplicación de evaluación no está bien definida en $\mathbb{P}^1 \times R$, pero se construye un esquema birracional con éste con una aplicación de evaluación bien definida a G , y que extiende la definida sobre la variedad de morfismos. Esta evaluación nos permite imponer condiciones geométricas para construir ciclos en R , como mostramos en el siguiente ejemplo.

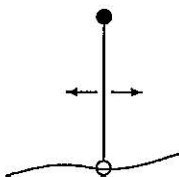
Para el grupo de Picard, $A^1(R)$, una base queda representada por los siguientes ciclos:

1. El ciclo asociado al subesquema cerrado en R , clausura del lugar de puntos en la variedad de morfismos que al evaluar nos dibujan una curva en G que pasa por una subvariedad de Schubert especial de codimensión uno en un momento, $t_0 \in \mathbb{P}^1$, fijo. En la literatura, una tal subvariedad de Schubert especial se denomina complejo lineal especial, y se describe como la subvariedad de rectas de \mathbb{P}^3 que pasan por una recta fija L , el eje del complejo lineal especial. La clausura en R de este lugar, tiene codimensión uno, es irreducible y definimos así el ciclo que formará parte de nuestra base, digamos α , como el asociado a este subesquema irreducible.
2. Otro tipo de condición que también nos describe un lugar de codimensión uno en la variedad de morfismos es la de pasar, esta vez en un momento $t \in \mathbb{P}^1$ arbitrario, por una subvariedad de Schubert especial de codimensión 2. Esta está formada por el conjunto de rectas que pasan por un punto dado de \mathbb{P}^3 . De nuevo la clausura de este lugar es un subesquema cerrado irreducible de R , y se define así el ciclo asociado β .

Para demostrar que los anteriores ciclos forman base sobre \mathbb{Z} de $A^1(R)$, presentamos una base dual formada por los ciclos construidos de la siguiente manera.

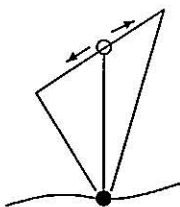
1. Fijamos en G una curva C de grado $d-1$, uno menos que el grado fijado en la variedad de morfismos. Por cada punto de la misma, determinamos en G un punto distinto, fuera de la curva, y de manera que esté bien definida la recta que une ambos. Bastará para este objetivo fijar ciertos fibrados con grado suficientemente alto para asegurar la

construcción, y elegir secciones. Se tiene así descrita una familia de rectas, de grado $d - 1$, en G , y para cada punto podemos considerar la curva unión de C y la correspondiente recta, de grado d . Esto define una familia de dimensión 1 en el esquema R , gracias a la propiedad universal de éste. Podríamos representarla gráficamente por:



Consideraremos así el ciclo asociado, α , a este subesquema cerrado, que hemos descrito, como antes, geométricamente.

2. Análogamente, fijada en G una curva C de grado $d - 1$, esta vez con un punto distinguido en ella, P , podemos construir una familia bien definida de rectas que pasan por P . Para ello, se elige una subvariedad lineal 2-dimensional que contenga a P , y en ella una recta general L que no pase por P . La subvariedad lineal se elige en el texto de cierto tipo que en este caso es el plano de rectas que pasan por un punto de \mathbb{P}^3 . De nuevo, y esta vez para cada punto Q de L , se tiene bien definida la recta que pasa por Q y P , y así estamos describiendo una familia 1-dimensional de rectas. La unión de la curva C con cada una de estas rectas, describe así una familia de dimensión uno en el esquema R . Llamaremos \mathbf{b} al ciclo asociado a este cerrado, y lo representaremos gráficamente por:



Es claro ahora que estos ciclos se construyen así con la pretensión de tener ciertas intersecciones vacías y otras en un solo punto. Efectivamente, los ciclos α y \mathbf{a} diremos que cortan una vez, pues de su construcción, vemos que la aplicación de evaluación dibuja, para α la curva de rectas antes descrita. Puesto que el ciclo pide cortar al complejo lineal especial en el momento determinado $t_0 \in \mathbb{P}^1$, al fijar este momento de la familia de rectas nos quedamos con la única recta que pasa por el correspondiente punto de la

curva C obtenido al evaluar en t . Esta recta corta al complejo lineal especial una sola vez, pues se suponen están en posición general.

Por su parte, los ciclos β y b también describen una situación geométrica clara. Las rectas dibujadas por parte de la familia, estaban todas apoyadas en un único punto de la curva, y se describían dentro de un plano (el de rectas de \mathbb{P}^3 que pasaban por un punto.) El ciclo quedaba definido por la condición de pasar por un plano del mismo tipo, de manera que ambos planos cortan en un sólo punto (el correspondiente a la recta de \mathbb{P}^3 que pasa por los dos puntos que definen a cada plano) de G , transversalmente. La recta que une este punto y el prefijado en la curva C describe un único elemento de la familia en R . De nuevo decimos que ambos ciclos cortan una vez.

Por otra parte, la familia que define al ciclo b , no puede verificar el tipo de condición geométrica impuesta en la definición de α , pues no se puede elegir el punto de la curva sobre el que se dibujan las rectas.

Los números de intersección de estos ciclos determinan una matriz

$$\begin{pmatrix} a \cdot \alpha & a \cdot \beta \\ b \cdot \alpha & b \cdot \beta \end{pmatrix},$$

con unos en la diagonal y un cero debajo de la misma, quedando así demostrado que forman base sobre \mathbb{Z} de los correspondientes grupos $A^1(R)$ y $A^{4d+3}(R)$. El conocimiento del cuarto número de intersección $(a \cdot \beta)$ carece de interés para nuestro propósito inmediato, pero no es difícil ver que coincide con el grado de la curva C . Esta es la filosofía general seguida en esta memoria.

Las variedades de morfismos tienen, en el caso que nos ocupa, dimensión calculable, son lisas e irreducibles. La aplicación de evaluación nos permite considerar objetos geométricos en nuestras construcciones.

Si bien, como queda demostrado en [Str], el esquema R es irreducible, liso, racional y proyectivo de la dimensión esperada (Teorema 2.1. en [Str]), no tenemos una aplicación de evaluación bien definida de $\mathbb{P}^1 \times R$ en G . Podemos, no obstante extender esta aplicación de evaluación a un esquema \tilde{Q} irreducible y birracional con $\mathbb{P}^1 \times R$, pudiendo recuperar el objetivo geométrico del trabajo. Por su interés particular, mostramos algunas de las propiedades del esquema \tilde{Q} , como su irreducibilidad, dimensión y la citada aplicación de evaluación.

En [Str] encontramos una función que determina los rangos de todos los grupos de Chow del esquema R . Nuestro segundo capítulo está dedicado a un estudio explícito de esta función que en [Str] se deduce calculando dimensiones de espacios tangentes a las células de una descomposición explícita

del esquema proporcionada por una acción de \mathbb{C}^* con un número finito de puntos fijos (teoremas de Bialynicki–Birula). Del mismo deducimos una manera especialmente sencilla y directa de calcular estos rangos para los grupos de ciclos de codimensión no superior al grado previamente fijado. Consideraciones puramente combinatorias, nos permiten construir bases enteras a partir de un número determinado de *ladrillos* que sólo depende de la variedad de Grassmann fijada.

La construcción del número apropiado de ladrillos nos quedará asegurada considerando los distintos ciclos de Schubert especiales en G y, biyectivamente, subvariedades lineales que corten a éstos de manera sencilla, al modo visto en el ejemplo anterior.

Separamos en el trabajo, la descripción de unos y otros ciclos en secciones dedicadas a cerrados en dimensión alta y baja respectivamente. Para el caso de dimensión alta, las propiedades de los morfismos y esquemas involucrados nos definirán ciclos con soporte irreducible. Además, éstos tendrán por esta construcción una información geométrica clara, como ciertas condiciones de intersección con las subvariedades de Schubert especiales iniciales. Denominaremos a estos ciclos *ladrillos*, pues para formar bases con el número apropiado de elementos, bastará generalizar en la línea de la combinatoria que nos marca el número explícito de cada rango en dimensión alta, la construcción de los mismos. Explícitamente, el rango de uno de estos grupos, digamos $A^k(R)$, siempre que k sea menor que el grado d , vienen dado como el número de monomios mónicos en cierto número de variables, cada una de un peso determinado (ladrillos), cuyo grado total es k . La generalización de la construcción particular para los ladrillos busca por tanto dar sentido claro a la expresión *monomios en las variables ladrillo*.

Esta generalización no contiene, en cambio, las propiedades geométricas de la construcción de los ladrillos, pues los esquemas considerados son esta vez productos cartesianos y fibrados, y los morfismos que intervienen no tienen las propiedades adecuadas a este efecto. En particular, no podemos asegurar la irreducibilidad de los cerrados así construidos en R , pues puede ocurrir que existan componentes de dimensión excedentaria.

Adoptamos por tanto una postura distinta y construimos directamente, con los mismos diagramas, los ciclos partiendo de ciclos en productos cartesianos de G , de manera que queda bien determinado en cada caso el grupo al que pertenece el ciclo construido. Así es como definimos nuestras *potencias*, y, finalmente intersectando, nuestros *monomios* en dimensión alta.

En definitiva, estas construcciones nos definen tantos ciclos de dimensión alta como necesitamos para formar una base sobre \mathbb{Z} .

Con la misma combinatoria describimos ciclos de dimensión baja, construyendo abiertos en R de familias de rectas sobre una curva fija C en G , de grado d' siempre menor que d , el apropiado para definir lugares de R . Podemos así describir familias de rectas parametrizadas por un espacio de parámetros que nos marca la dimensión. Estos espacios de parámetros son siempre productos de rectas proyectivas (tantos como puntos móviles necesitamos en la curva C), y subvariedades lineales de G . Se fijan además puntos en la curva, y por cada punto móvil y cada punto fijado de C se da una familia de rectas que se apoyan en éstos y en las subvariedades lineales. El grado de la curva C será la diferencia entre el grado inicial d , y el número de puntos, móviles y fijos, que para cada parámetro se eligen en C . Los ciclos de dimensión baja, serán los asociados a las clausuras de estas familias en el esquema R .

La construcción explícita se desarrolla con el objetivo geométrico de describir lugares que por la aplicación de evaluación determinen subvariedades lineales generales, de la dimensión adecuada a asegurar de manera precisa la intersección con una subvariedad de Schubert especial. En concreto, cada intersección planteada será claramente transversal por la generalidad de ambos tipos de subvariedades en G .

Dedicamos la última sección del capítulo 3 a demostrar cómo estos conjuntos de ciclos nos aportan bases como \mathbb{Z} -módulos de los grupos de Chow de nuestro esquema de cocientes en dimensión y codimensión estrictamente inferiores al grado fijado, mostrando cómo, por su construcción, podemos disponer los correspondientes números de intersección en una matriz diagonal superior con unos en la diagonal.

Por otra parte, en nuestras construcciones el dato que aporta el grado, afecta claramente como obstrucción a los ciclos de dimensión baja, pues las familias necesitan una curva C cuyo grado disminuye en función de las rectas que necesitamos describir. La obstrucción, no obstante, es simplemente numérica, de manera que estas bases tienen descripción idéntica si se consideran en grado suficientemente alto.

Para el resto de grupos, en dimensión (o codimensión) mayor o igual al grado, la descripción geométrica de los ciclos no aporta el suficiente número de ellos para tener una base, debido a la obstrucción del grado antes citada. Si bien el rango de un tal grupo es siempre menor que el correspondiente para grado suficientemente alto (hecho que hemos constatado con un cálculo explícito de estos rangos para el espacio proyectivo y la Grassmanniana de rectas del mismo), el cálculo combinatorio de éste excluye menos casos de los que geoméricamente hemos de descartar en nuestras construcciones. Esto

sugiere como solución para construir bases en el caso $d \leq k$, el permitir que la curva C , que hasta ahora era una curva fija, varíe dentro de familias de curvas racionales.

En algunos casos particulares esta idea nos permite construir bases, pero no aparece claramente la sistemática que puede haber detrás. En particular aparecen matrices de intersección no triangulares que resultan difíciles de manipular en el caso general.

Agradecimientos

Resulta difícil plasmar en pocas líneas el profundo agradecimiento que siento por muchas, muchas personas. Hacerlo supone un esfuerzo que haría poca justicia a todas ellas, por las pocas palabras que les dedicaré. Aún así he resuelto escribir estos agradecimientos, sabiendo que, irremediablemente olvide a muchos, hasta a alguno indispensable. Espero que sepáis perdonarme todos, los omitidos y los que sin desearlo aquí aparezcan. En fin, allá vamos.

No puedo olvidar que en mis principios en la Matemática tuve como fuente a Concha. Le siguieron, ya en el Instituto, Pilar, Julián y Cele (nunca olvidaré tus palabras). En la universidad el número de profesores creció, y de muchos guardo buenos recuerdos. En especial de los que me empujaron a estar aquí: Gabino, Adolfo, Rafa. También gocé de la carrera gracias a mis compañeros: Raquel, Mario, Angel, Sonsoles,

La etapa de pertenencia al Departamento, ha sido especialmente feliz. He compartido muchos momentos con todos vosotros, y siempre me he sentido como en una gran familia. No puedo evitar citar algunos números: 213, 400, 4141; y algunos nombres: Pablo, Jorge, Susi, Chema, Enrique, Sonsoles, Raúl (...).

Tampoco me olvido de toda mi familia, ni de mis amigos (y aquí estáis todos).

Capítulo 1

Esquema Quot

1.1 Grassmannianas de cocientes

Sean k un cuerpo algebraicamente cerrado y V un espacio vectorial sobre k de dimensión n . Dado un k -esquema X , denotemos por \mathcal{O}_X^n el fibrado trivial $V \otimes \mathcal{O}_X$ de rango n . Consideremos el funtor contravariante de la categoría de k -esquemas en la de conjuntos que a cada k -esquema X le asocia

$$\mathcal{F}(X) := \{ \mathcal{O}_X^n \longrightarrow E_r \longrightarrow 0 \mid \begin{array}{l} \text{sucesiones exactas cortas con} \\ E_r \text{ fibrado de rango } r \end{array} \};$$

y a cada morfismo $f : X \longrightarrow Y$ de k -esquemas, la aplicación de conjuntos

$$\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(Y) \longrightarrow \mathcal{F}(X),$$

definida por

$$\mathcal{F}(f)((\mathcal{O}_Y^n \longrightarrow E \longrightarrow 0)) = (f^* \mathcal{O}_Y^n \longrightarrow f^* E \longrightarrow 0).$$

Este funtor es representable por un k -esquema, $G(r, V)$ ó $G(r, n)$, denominado la *Grassmanniana de cocientes de rango r del espacio vectorial n -dimensional V* .

Como elemento universal para el funtor \mathcal{F} , este k -esquema, $G := G(r, n)$, viene dotado de un cociente universal

$$\mathcal{O}_G^n \longrightarrow E_G \longrightarrow 0, \tag{1.1}$$

donde E_G es un fibrado de rango r tal que la biyección

$$\text{Mor}(X, \text{Gr}(r, n)) \xrightarrow{\phi} \mathcal{F}(X)$$

viene determinada por:

$$\phi(1_G) = (\mathcal{O}_G^n \longrightarrow E_G \rightarrow 0),$$

(ver [EGA I]).

Podemos reformular esta propiedad universal de $G(r, n)$ de la siguiente manera. Dados un k -esquema cualquiera X y un fibrado de rango r sobre X , cociente del fibrado trivial \mathcal{O}_X^n :

$$\mathcal{O}_X^n \longrightarrow E_X \rightarrow 0,$$

existe un único morfismo $f : X \rightarrow G(r, n)$ tal que

$$(f^* \mathcal{O}_G^n \rightarrow f^* E_G \rightarrow 0) = (\mathcal{O}_X^n \rightarrow E_X \rightarrow 0).$$

Esta construcción se puede generalizar, y se definen las Grassmannianas de cocientes de un haz arbitrario, que engloban a las ya descritas. Fijados un entero $p \geq 1$, un esquema S y un \mathcal{O}_S -módulo casi-coherente \mathcal{E} , definimos un funtor $\mathcal{F}_{p, \mathcal{E}}$ contravariante de la categoría de S -esquemas en la de conjuntos de la siguiente manera. Dado un S -esquema T se define $\mathcal{F}_{p, \mathcal{E}}(T)$ como el conjunto

$$\mathcal{F}_{p, \mathcal{E}}(T) := \{ \mathcal{E}_{(T)} \rightarrow K \rightarrow 0 \mid K \text{ cociente localmente libre de rango } p \}.$$

Por otra parte, dado un S -morfismo $g : T' \rightarrow T$, definimos una aplicación de conjuntos

$$\mathcal{F}_{p, \mathcal{E}}(g) : \mathcal{F}_{p, \mathcal{E}}(T) \longrightarrow \mathcal{F}_{p, \mathcal{E}}(T')$$

definida por

$$\mathcal{F}_{p, \mathcal{E}}(g) ((\mathcal{E}_{(T)} \rightarrow K \rightarrow 0)) = (g^* \mathcal{E}_{(T)} \rightarrow g^* K \rightarrow 0).$$

Obsérvese que dado un cociente $K = \mathcal{E}_{(T)}/N$ de $\mathcal{E}_{(T)}$ localmente libre de rango p , el $\mathcal{O}_{(T')}$ -módulo $g^*(K)$ es un haz localmente libre de rango p , isomorfo al cociente de $\mathcal{E}_{(T')} = g^*(\mathcal{E}_{(T)})$ por la imagen de g^*N . Es inmediato que, para un segundo S -morfismo $g' : T'' \rightarrow T'$, se tiene la igualdad $\mathcal{F}_{p, \mathcal{E}}(g \circ g') = \mathcal{F}_{p, \mathcal{E}}(g') \circ \mathcal{F}_{p, \mathcal{E}}(g)$. En estas condiciones tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1 (*EGA I Tma.(9.7.4)*) *Para todo esquema S y todo \mathcal{O}_S -módulo casi-coherente \mathcal{E} , el funtor $\mathcal{F}_{p, \mathcal{E}}$ es representable.*

El S -esquema X que representa al funtor $\mathcal{F}_{p,\mathcal{E}}$, y que queda definido salvo isomorfismo, se llama la *Grassmanniana de índice p de \mathcal{E}* , y la denotaremos $\mathrm{Gr}_p(\mathcal{E})$, o más simplemente \mathcal{G}_p . Se tiene un $\mathcal{O}_{\mathcal{G}_p}$ -módulo $E_{\mathcal{G}_p}$, localmente libre de rango p y cociente de $\mathcal{E}_{(\mathcal{G}_p)}$, determinado salvo isomorfismo, tal que la aplicación $g \mapsto \mathcal{F}_{p,\mathcal{E}}(g)$ es un isomorfismo functorial $\mathrm{Hom}_S(T, \mathcal{G}_p) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{p,\mathcal{E}}(\mathcal{E}(T))$. Al $\mathcal{O}_{\mathcal{G}_p}$ -módulo $E_{\mathcal{G}_p}$ lo denominaremos el cociente universal de \mathcal{G}_p . Sobre este esquema $\mathrm{Gr}_p(\mathcal{E})$ se tienen los siguientes resultados:

Proposición 1 (*EGA I Prop. (9.7.7)*) *Para todo \mathcal{O}_S -módulo casi-coherente \mathcal{E} , $\mathrm{Gr}_p(\mathcal{E})$ es un S -esquema separado sobre S . Si \mathcal{E} es de tipo finito (respectivamente de presentación finita), $\mathrm{Gr}_p(\mathcal{E})$ es un S -esquema de tipo finito (respectivamente, de presentación finita) sobre S .*

Para S fijo $\mathcal{F}_{p,\mathcal{E}}(S)$ no es un funtor (contravariante) de la categoría de \mathcal{O}_S -módulos casi-coherentes en la de conjuntos, puesto que a un morfismo cualquiera $g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ de \mathcal{O}_S -módulos casi-coherentes no le corresponde en general una aplicación $\mathcal{F}_{p,\mathcal{E}'}(S) \rightarrow \mathcal{F}_{p,\mathcal{E}}(S)$. La composición $\mathcal{E} \xrightarrow{g} \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{H}$ de g y un homomorfismo sobreyectivo $\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{H}$, no es sobreyectiva en general. Esta última condición es no obstante satisfecha siempre que $g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ sea un epimorfismo; y todo \mathcal{O}_S -módulo cociente \mathcal{H} de \mathcal{E}' , localmente libre de rango p , puede entonces ser considerado como un \mathcal{O}_S -módulo cociente de \mathcal{E} . En otras palabras, dar un tal morfismo g define una *inyección* de conjuntos

$$i_g : \mathcal{F}_{p,\mathcal{E}'}(S) \longrightarrow \mathcal{F}_{p,\mathcal{E}}(S). \quad (1.2)$$

Esta inyección de conjuntos levanta a cualquier S -esquema. Efectivamente, es claro que, para todo morfismo $T \rightarrow S$, el homomorfismo $g(T) : \mathcal{E}(T) \rightarrow \mathcal{E}'(T)$ (imagen recíproca de $g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$), es un epimorfismo, de manera que se obtiene una inyección de conjuntos

$$i_{g(T)} : \mathcal{F}_{p,\mathcal{E}'}(T) \longrightarrow \mathcal{F}_{p,\mathcal{E}}(T),$$

y para todo S -morfismo $f : T' \rightarrow T$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{p,\mathcal{E}'}(T) & \xrightarrow{i_{g(T)}} & \mathcal{F}_{p,\mathcal{E}}(T) \\ \downarrow \mathcal{F}_{p,\mathcal{E}'}(f) & & \downarrow \mathcal{F}_{p,\mathcal{E}}(f) \\ \mathcal{F}_{p,\mathcal{E}'}(T') & \xrightarrow{i_{g(T')}} & \mathcal{F}_{p,\mathcal{E}}(T') \end{array}$$

es conmutativo. Puesto que los funtores $\mathcal{F}_{p,\mathcal{E}}$ y $\mathcal{F}_{p,\mathcal{E}'}$ son representables, corresponde a todo epimorfismo $g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ de \mathcal{O}_S -módulos casi-coherentes un S -morfismo

$$\mathrm{Gr}_p(g) : \mathrm{Gr}_p(\mathcal{E}') \longrightarrow \mathrm{Gr}_p(\mathcal{E}) \quad (1.3)$$

tal que la imagen recíproca del cociente universal sobre $\mathrm{Gr}_p(\mathcal{E})$ es el cociente universal sobre $\mathrm{Gr}_p(\mathcal{E}')$. Recogemos esto último en la siguiente:

Proposición 2 (*EGA I, Prop.(9.7.9)*) *Para todo epimorfismo $g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ de \mathcal{O}_S -módulos casi-coherentes, el S -morfismo (1.3) es una inmersión cerrada.*

Además, la imagen $G_{\mathcal{E}'}$ de $\mathrm{Gr}_p(\mathcal{E}')$ en $\mathrm{Gr}_p(\mathcal{E})$ por (1.3), tiene la siguiente propiedad universal. Para todo morfismo

$$T \xrightarrow{f} S,$$

y todo cociente $\mathcal{O}_T^n \twoheadrightarrow E$ libre de rango r que factorice a través de $f^*\mathcal{E}'$, existe un único levantamiento

$$\tilde{f} : T \longrightarrow \mathrm{Gr}_p(\mathcal{E}),$$

con imagen contenida en $G_{\mathcal{E}'}$.

1.2 Esquema de morfismos

A partir de ahora, utilizaremos ciertas construcciones generales únicamente en el caso particular que nos interesa. Sean, pues, k un cuerpo algebraicamente cerrado, \mathbb{P}^1 la recta proyectiva sobre k y V un espacio vectorial sobre k de dimensión n . Denotaremos, como antes, por $G(r, n)$ el esquema de espacios vectoriales cocientes de rango r de V , o de otra forma, la Grassmanniana de cocientes de rango r de V .

Denotaremos por R_d^0 , o R^0 , el espacio de morfismos de grado d de la recta proyectiva \mathbb{P}^1 en la Grassmanniana $G(r, n)$. La dimensión de R^0 es $n \cdot d + r(n - r)$ (cf. [Str]). Dar un morfismo tal es equivalente a dar un cociente (localmente libre) del fibrado $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ sobre \mathbb{P}^1 , con rango r y grado d . Es decir, todo elemento $\varphi \in R^0$ tiene asociada una sucesión exacta de fibrados sobre \mathbb{P}^1 :

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^n \longrightarrow K \longrightarrow 0, \quad (1.4)$$

donde hemos denotado por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^n$ el fibrado trivial $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$. El cociente tiene polinomio de Hilbert:

$$\chi(K, m) = r(m + 1) + d,$$

esto es, rango r y grado d .

Las sucesiones exactas (1.4), se organizan en una sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times R^0}^n \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow 0$$

exacta de fibrados que, por la propiedad universal de la Grassmanniana dota al espacio $\mathbb{P}^1 \times R^0$ de un morfismo natural:

$$\mathbb{P}^1 \times R^0 \xrightarrow{ev} G(r, n) \quad (1.5)$$

que llamaremos *aplicación de evaluación*.

1.3 Esquema Quot

El fin último de esta memoria es el de calcular intersecciones en el esquema de morfismos, pero éste no es compacto. Trabajaremos por tanto en una compactificación del mismo, cierto esquema que parametriza familias de cocientes del fibrado trivial $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^n := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \otimes V$, ($\dim(V) = n$), sobre \mathbb{P}^1 , que pasamos a describir.

Sea $P(t) = r \cdot (t + 1) + d$, un polinomio fijo, y consideremos el funtor contravariante de la categoría de k -esquemas en la de conjuntos, definido por:

$$\mathcal{F}_P(X) := \{ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times X}^n \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0 \mid \text{sucesión exacta corta con } \mathcal{E} \\ \text{de polinomio de Hilbert } \chi(\mathcal{E}_x, m) \equiv P(m) \\ \text{en las fibras de } X, \text{ salvo isomorfismos.} \}$$

Dos cocientes $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times X}^n \xrightarrow{f} \mathcal{E}$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times X}^n \xrightarrow{g} \mathcal{E}'$, se dicen isomorfos si existe un isomorfismo $\phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ tal que $\phi \circ f = g$.

El funtor \mathcal{F}_P es representable (cf [Vie] 1.5, ó [Gro IV]) por un k -esquema que denotaremos $\text{Quot}_{r,d}$, o simplemente $R_{r,d}$. Nos referiremos a él como el *esquema de cocientes de rango r y grado d* , y a sus elementos como *cocientes*. En ocasiones, y por abreviar, usaremos la notación:

$$(\mathcal{O}_{P \times R}^n \longrightarrow B)$$

para un cociente en $R_{r,d}$. De otra manera, cada elemento de $R_{r,d}$ es una sucesión exacta de haces sobre \mathbb{P}^1 ,

$$(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^n \longrightarrow B),$$

con cociente de rango r y grado d . Otro tal cociente isomorfo define el mismo elemento de $R_{r,d}$.

Como elemento universal para el funtor representable \mathcal{F}_P , $R_{r,d}$ viene dotado de una sucesión exacta universal de haces:

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_R \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times R_{r,d}}^n \rightarrow \mathcal{E}_R \rightarrow 0, \quad (1.6)$$

y una biyección de conjuntos:

$$\mathrm{Mor}(S, R_{r,d}) \xrightarrow{\phi} \mathcal{F}_P(S)$$

que se realiza asociando a un morfismo

$$F : S \longrightarrow R_{r,d}$$

el pullback de la sucesión (1.6) por la aplicación:

$$1 \times F : \mathbb{P}^1 \times S \longrightarrow \mathbb{P}^1 \times R_{r,d}.$$

Una descripción explícita de los puntos de R utilizada en [R–R–W] es la siguiente. Cada punto en $R_{r,d}$ se puede considerar como una clase de equivalencia de matrices $(n-r) \times n$, $M = (M_{ij}(s, t))$, donde cada $M_{ij}(s, t)$ es un polinomio homogéneo de grado d_i con $\sum d_i = d$. Dos tales matrices, M y M' , serán equivalentes si, tras un reordenamiento adecuado de filas si fuera necesario, los grados de las filas de M y M' coinciden y existe una matriz $(n-r) \times (n-r)$, $U = (U_{ij}(s, t))$, con $U_{ij}(s, t)$, polinomio homogéneo de grado $d_i - d_j$, $\det U$ no idénticamente cero, y $M' = UM$. Tenemos, no obstante, una descripción más natural de los puntos de $R_{r,d}$ como haces cocientes, y convendrá poder pasar de una a otra.

Dado un cociente $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^n \longrightarrow \mathcal{B}) \in R_{r,d}$, sea

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^n \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow 0$$

la sucesión exacta que lo define. Elegido un isomorfismo $\mathcal{A} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n-r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-d_i)$ y fijada una base en V , podemos identificar el haz cociente \mathcal{B} con la matriz M de la aplicación $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^r$.

El esquema de morfismos R_d^0 es el mayor abierto U de $R_{r,d}$ con la propiedad de que el cociente universal, \mathcal{E}_R , tiene rango constante r sobre $\mathbb{P}^1 \times U$.

El esquema Quot, $R_{r,d}$, es, además, una variedad proyectiva, lisa, racional e irreducible de dimensión

$$\dim(R_{r,d}) = nd + r(n-r), \quad (1.7)$$

como se demuestra en [Str] (§2, Tma. 2.1.).

1.4 Haces de torsión

Ya hemos distinguido en R al esquema de morfismos, $R^0 = R_d^0$, como el mayor abierto, $U \subseteq R$, con la propiedad de que el cociente universal \mathcal{E}_R tiene

rango constante r sobre $\mathbb{P}^1 \times U$. Por otra parte, de su definición original dada en la sección §1.2, sabemos que los puntos de R^0 son cocientes libres, esto es, puntos en R de la forma

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^n \longrightarrow \mathcal{B}$$

con \mathcal{B} libre de rango r y grado d . Describimos a continuación otros lugares de R .

Denotemos por R^1 el cerrado en R definido por:

$$R^1 := R_{r,d} \setminus R^0.$$

Un punto en R^1 será así de la forma:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^n \longrightarrow E \oplus T,$$

con $T \neq 0$ haz de torsión, E libre de rango r , y tales que el grado total es

$$\deg(E \oplus T) = \deg(E) + h^0(T) = d.$$

Si $\text{sop}(T) = \{p_1, \dots, p_k\} \subsetneq \mathbb{P}^1$ es el soporte, por supuesto finito, del haz de torsión, escribiremos T como suma directa de haces de torsión

$$T = T_{p_1} \oplus \dots \oplus T_{p_k},$$

con $\text{sop}(T_{p_i}) = \{p_i\}$, $i = 1, \dots, k$. Dado un $p_i \in \text{sop}(T)$, podemos suponer que $p_i = [0, 1]$, es decir, es el origen en una carta afín de \mathbb{P}^1 con coordenada x . El haz T_{p_i} puede verse entonces como $k[x]$ -módulo con soporte en p_i y por tanto es de la forma

$$\bigoplus_j k[x]/(x^{t_j}).$$

Incluimos seguidamente algunos resultados generales sobre módulos de torsión, con el objeto de fijar la notación utilizada posteriormente. Podemos traducir resultados sobre $k[x]$ -módulos, a resultados sobre endomorfismos $t : V \rightarrow V$ de espacios vectoriales vía la siguiente

Proposición 3 (*Proposición 7, Cap.X, §4 [S-G]*) Sea k un cuerpo. Cada $k[x]$ -módulo A determina un espacio vectorial $V = V_A$ sobre k (V_A el grupo aditivo A y multiplicación escalar por los elementos del cuerpo $k \subset k[x]$) y un endomorfismo $t_x : V \rightarrow V$ de este espacio (con t_x la operación de multiplicación escalar por x). La asignación $A \mapsto (V_A, t_x)$ es una biyección de todos los módulos sobre $k[x]$ en todos los pares (V, t) , con V un espacio vectorial sobre k y $t : V \rightarrow V$ un endomorfismo del mismo.

Bajo esta identificación, un módulo de torsión sobre $k[x]$ con soporte $\{[0, 1]\}$ será de la forma

$$T = \bigoplus_j k[x]/(x^{t_j}), \quad \sum_j t_j = m = \dim(V).$$

Sea T' el esquema que parametriza haces de torsión soportados en P y con grado m . Si tomamos una carta afín para P en la que $P = [0, 1]$, T' se identifica con la fibra sobre x^m de la aplicación Ψ del conjunto de matrices cuadradas $(m \times m)$ en el de polinomios mónicos de grado m , que a cada matriz H le asocia su polinomio característico. Si consideramos en T' , bajo esta identificación, el abierto U_m de matrices con polinomio mínimo x^m , el grupo $GL(m)$ actúa en él transitivamente, con la acción natural dada por

$$\begin{array}{ccc} GL(m) \times U_m & \longrightarrow & U_m \\ (h, t) & \longrightarrow & hth^{-1}. \end{array}$$

El abierto U_m es así irreducible y

$$U_m \simeq GL(m)/\text{Est}(U_m),$$

donde $\text{Est}(U_m)$ es el estabilizador de U_m . Fijemos en U_m un elemento t y consideremos en el espacio vectorial asociado V con endomorfismo $t : V \rightarrow V$, la base en la que t viene dado por su forma canónica

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El estabilizador del elemento t es así el conjunto de endomorfismos $h \in \text{End}(V)$ tales que $hth^{-1} = t$, esto es el subespacio de matrices $H = (a_{ij})$ invertibles $m \times m$ con $HJ = JH$, es decir, tales que

$$\begin{aligned} a_{ij} &= 0 \text{ siempre que } i > j, \\ a_{11} &= a_{22} = \cdots = a_{mm}, \\ a_{12} &= a_{23} = \cdots = a_{(m-1)m}, \\ &\vdots \\ a_{1(m-2)} &= a_{2(m-1)} = a_{3m}, \\ a_{1(m-1)} &= a_{2m}, \\ a_{1m} &\text{ libre.} \end{aligned}$$

Pero éste es un sistema lineal de ecuaciones en las entradas de H con espacio de soluciones m -dimensional. Una matriz solución será de la forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \cdots & \lambda_{m-1} & \lambda_m \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \cdots & \lambda_{m-1} \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \cdots & \lambda_{m-2} \\ \vdots & \ddots & 0 & \lambda_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Además, el lugar, U_ℓ , de matrices con polinomio mínimo x^ℓ con $\ell < m$, tiene estabilizador de dimensión superior a m . Como, por otra parte, la dimensión de toda componente de la fibra de Ψ ha de ser mayor o igual que $m^2 - m$, se tiene que T' es irreducible de dimensión $m^2 - m$.

De todo lo anterior podemos concluir que dado un punto en R^1 de la forma:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^n \longrightarrow E \oplus T$$

con E libre de rango r y $T \neq 0$ haz de torsión soportado en $\{p_1, \dots, p_k\} \subsetneq \mathbb{P}^1$, si descomponemos T como suma de haces torsión

$$T = T_{p_1} \oplus \cdots \oplus T_{p_k},$$

y $m_i, i = 1, \dots, k$, es la dimensión del espacio vectorial correspondiente a cada sumando (cf Proposición 3), el grado total de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^n \longrightarrow E \oplus T$ es

$$d = \deg(E) + h_0(T) = \deg(E) + \sum_{i=1}^k m_i. \quad (1.8)$$

Tras este paréntesis volvemos a nuestro propósito inicial. Puesto que describimos cocientes de $R_{r,d}$, la identidad (1.8) impone una limitación a la diversidad de cocientes en R^1 . Concretamos esta última afirmación en la siguiente descomposición de $R_{r,d}$.

En lo que sigue denotaremos por R al esquema $R_{r,d}$; sea, para $m \geq 1$

$$R_m := \{(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^n \longrightarrow E \oplus T) \in R \mid \forall x \in \text{sop}(T), \dim T_x \leq m\}.$$

Con la misma notación, si $m = 0$, R_0 estará formado por los cocientes exclusivamente libres, es decir $R_0 = R^0$. Además, el abierto R^0 está incluido en

cualquier R_m así definido. Es fácil ver así que cada R_m es un abierto en R . De la definición es clara la siguiente cadena de inclusiones:

$$R^0 \subset R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \cdots,$$

que es finita puesto que, obviamente, $R_k = R$ para cualquier $k \geq n - r$; de hecho $R_{n-r-1} = R$. Efectivamente, supongamos fijados un punto $x \in \mathbb{P}^1$ y un cociente en R :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^n \longrightarrow E \oplus T,$$

con $T \neq 0$ haz de torsión soportado en $\{x\}$ y de dimensión $n - r$. Si en el epimorfismo de fibras

$$\mathcal{O}_{|x}^n \longrightarrow E_{|x} \oplus T_x,$$

consideramos el epimorfismo inducido de espacios vectoriales, éste lo es entre dos espacios vectoriales de dimensiones

$$\dim(E_{|x} \oplus T_x) = r + (n - r) = n = \dim(\mathcal{O}_{|x}^n).$$

Así, el epimorfismo es de hecho isomorfismo, digamos

$$\phi_x : \mathcal{O}_{|x}^n \xrightarrow{\sim} E_{|x} \oplus T_x.$$

El epimorfismo de haces

$$\mathcal{O}^n \xrightarrow{\phi} E \oplus T,$$

tiene así como núcleo un haz de torsión, de manera que, al ser \mathcal{O}^n libre de torsión, $\text{Ker}(\phi) \equiv 0$, y por lo tanto \mathcal{O}^n es isomorfo a $E \oplus T$, en contradicción con \mathcal{O}^n libre de torsión. Queda así probado el siguiente

Lema 4 *Con las notaciones anteriores, para cualquier $k \geq n - r - 1$ se tiene que*

$$R_k = R.$$

Por otra parte, la identidad (1.8) impone nuevas restricciones a la existencia de los subesquemas R_m . Si $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^n \longrightarrow E \oplus T) \in R_m$, T descompone como $T = \bigoplus_{i=1}^k T_{p_i}$, $\{p_1, \dots, p_k\} = \text{sop}(T)$, y $t_i = h^0(T_{p_i})$, es inmediato que

$$m + \deg(E) \leq \sum_{i=1}^k t_i + \deg(E) = d, \quad (1.9)$$

y en particular $m \leq d$.

Consideremos finalmente los siguientes subesquemas en R :

$$X_0 := R_0,$$

$$X_m := R_m \setminus R_{m-1}, \quad m = 1, \dots, \min\{d, n - r - 1\};$$

de otra manera, para cada entero $m = 0, 1, \dots, \min\{d, n - r - 1\}$,

$$X_m := \left\{ (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^n \longrightarrow E \oplus T) \mid \begin{array}{l} \forall x \in \text{sop}(T), \dim(T_x) \leq m \\ \text{y } \exists y \in \text{sop}(T) \text{ con } \dim(T_y) = m \end{array} \right\}.$$

Los siguientes hechos son consecuencia directa de las definiciones

1. si $i \neq j$ entonces $X_i \cap X_j = \emptyset$;
2. cada X_m es localmente cerrado en R ;
3. el esquema R es unión disjunta de los X_m , es decir:

$$R = \bigsqcup_m X_m, \quad m = 0, 1, \dots, \min\{d, n - r - 1\}.$$

Se tiene, además, la siguiente

Proposición 5 *Para cada $m = 1, \dots, \min\{d, n - r - 1\}$, el subesquema localmente cerrado $X_m \subseteq R$ es irreducible de dimensión*

$$\dim(X_m) = nd + r(n - r) - m(r + 1) + 1.$$

Demostración: Consideremos en $X_m \times \mathbb{P}^1$ el diagrama de incidencia

$$\begin{array}{ccc} & V_m \subseteq X_m \times \mathbb{P}^1 & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ X_m & & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

es decir, sea

$$V_m := \{ (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^n \longrightarrow E \oplus T, x) \in X_m \times \mathbb{P}^1 \mid \dim(T_x) = m \},$$

con las proyecciones inducidas por las naturales de $X_m \times \mathbb{P}^1$ es sus factores. Como el soporte de un haz de torsión en R es en particular finito, la aplicación p_1 es finita. Además, el grupo $\text{PGL}(1)$ actúa transitivamente en \mathbb{P}^1 en la forma

$$g(x) := g^{-1}x,$$

y en X_m por imagen inversa, es decir:

$$g(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^n \longrightarrow E \oplus T) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^n \longrightarrow g^*E \oplus g^*T;$$

de manera que también lo hace en V_m . El morfismo p_2 es equivariante para esta acción y, por tanto,

$$\dim(X_m) = \dim(V_m) = \dim(\mathbb{P}^1) + \dim(p_2^{-1}(x)) \quad (1.10)$$

para cualquier $x \in \mathbb{P}^1$.

Fijado un punto $P \in \mathbb{P}^1$, denotemos por $X_m(P)$ la fibra sobre P de $p_2 : V_m \rightarrow \mathbb{P}^1$. Consideremos los siguientes esquemas:

1. el esquema de cocientes de rango r y grado $d - m$, $Q := R_{r,d-m}$, que sabemos es irreducible de dimensión

$$\dim(R_{r,d-m}) = n(d - m) + r(n - r). \quad (1.11)$$

2. el esquema T' que parametriza haces de torsión soportados en P y con grado m . Este esquema es irreducible de dimensión $m^2 - m$.

Sobre $T' \times \mathbb{P}^1$ podemos considerar el haz tautológico \mathcal{E} , con fibras:

$$\mathcal{E}|_{(T_y, x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y \\ T_y & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Si $\pi : T' \times \mathbb{P}^1 \rightarrow T'$ denota la proyección sobre el primer factor,

$$\pi_*((\mathcal{O}^n)^* \otimes \mathcal{E})$$

es un haz sobre T' con fibra $\pi_*((\mathcal{O}^n)^* \otimes \mathcal{E})_T \simeq \text{Hom}(\mathcal{O}^n, \mathcal{E}_T)$. Sea T'' el fibrado vectorial asociado al haz localmente libre $\pi_*((\mathcal{O}^n)^* \otimes \mathcal{E})$ ([H] Cap.II, Ejercicio 5.18), y consideremos el abierto irreducible

$$U \subseteq T'' \times Q,$$

formado por pares $(\mathcal{O}^n \rightarrow \mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^n \rightarrow \mathcal{F})$ tales que el morfismo inducido de haces

$$\mathcal{O}^n \rightarrow \mathcal{F} \oplus \mathcal{E},$$

es epimorfismo. Este es un abierto irreducible, con una aplicación dominante natural sobre R dada por la propiedad universal del esquema de cocientes,

$$U \xrightarrow{F} R,$$

con imagen $F(U) = X_m(P)$, de manera que $X_m(P)$ es irreducible. Fijemos, finalmente, un $k[x]$ -módulo T_P soportado en P , y sea U^0 el abierto en U de puntos de la forma

$$(\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_P^n, T_P), \mathcal{O}_{P^1}^n \longrightarrow \mathcal{F}).$$

El morfismo F restringido a U^0 , $F_0 := F|_{U^0}$, es claramente dominante sobre $X_m(P)$. Además, U^0 tiene dimensión:

$$\begin{aligned} \dim(U^0) &= \dim(\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_P^n, T_P)) + \dim(Q) \\ &= nm + n(d - m) + r(n - r) = nd + r(n - r). \end{aligned}$$

Por otra parte, sea Z la fibra de F_0 sobre un punto general $q \in X_m(P)$, esto es un cociente de la forma:

$$q = (\mathcal{O}_{P^1}^n \longrightarrow E \oplus T),$$

con E libre de rango r y grado m , T de torsión de grado m soportado en un punto $P \in \mathbb{P}^1$. La dimensión de Z es así, por definición del esquema R , la siguiente

$$\dim(Z) = \dim(\mathrm{Hom}_k(E_P, T_P)) + \dim(\mathrm{Aut}(T_P, T_P)) = rm + m,$$

y por tanto

$$\dim(V_m) = 1 + \dim(X_m(P)) = 1 + \dim(U^0) - \dim(Z),$$

en definitiva:

$$\dim(V_m) = nd + r(n - r) + 1 - r(m + 1)$$

como queríamos demostrar. \square

1.5 Subvariedades en la Grassmanniana

En secciones posteriores, necesitaremos utilizar ciertos resultados geométricos en la Grassmanniana, $G(r, n)$, de cocientes de rango r de un espacio vectorial V de dimensión n , ó, de otra manera la Grassmanniana, $\mathbb{G}(r - 1, \mathbb{P}(V))$, de subespacios lineales de dimensión $r - 1$, del espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ de cocientes de rango 1. Por comodidad denotaremos a lo largo de esta sección por $\mathbb{G}(k, m)$ a $\mathbb{G}(r - 1, \mathbb{P}(V))$, esto es, $k = r - 1$ y $m = n - 1$.

En concreto, nos interesaremos por las subvariedades lineales y las de Schubert especiales, que en posición general interseken en un único punto de la Grassmanniana.

Sea así $\mathbb{G}(k, m)$ la Grassmanniana de subespacios lineales de dimensión k en un espacio proyectivo de dimensión m . Esta tiene una inmersión natural, la inmersión de Plücker, en un espacio proyectivo, $\mathbb{P}^N := \mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V)$, de dimensión $N = \binom{n}{r} - 1$.

Como ya hemos adelantado, nos interesan en primer lugar las subvariedades lineales, $\Phi \subseteq \mathbb{P}^N$, en $\mathbb{G}(k, m)$. Si Λ_t denota un subespacio lineal arbitrario de dimensión t , se tienen los siguientes dos tipos de subvariedades lineales en $\mathbb{G}(k, m)$:

- el conjunto de subespacios Λ_k , contenidos en un subespacio fijo, $\Lambda_{k+\ell}^0$, y conteniendo un subespacio fijo, Λ_{k-1}^0 :

$$\Phi_\ell := \{\Lambda_k \subset \mathbb{P}(V) \mid \Lambda_{k-1}^0 \subset \Lambda_k \subseteq \Lambda_{k+\ell}^0\}.$$

Una tal subvariedad lineal tiene dimensión ℓ , y nos referiremos a ella como *de tipo α* . La dimensión de una subvariedad lineal de tipo α es, así, a lo más $m - k = n - r$.

- El conjunto de subespacios Λ_k , contenidos en un subespacio fijo, Λ_{k+1}^0 , y conteniendo un subespacio fijo, Λ_{k-p}^0 :

$$\Psi_p := \{\Lambda_k \subset \mathbb{P}(V) \mid \Lambda_{k-p}^0 \subset \Lambda_k \subseteq \Lambda_{k+1}^0\}.$$

Una tal subvariedad lineal tiene dimensión p , que será a lo más $m = r - 1$, y nos referiremos a ella como *de tipo β* .

En particular, una recta en $\mathbb{G}(k, m)$, queda determinada al fijar dos subespacios en $\mathbb{P}(V)$, de dimensiones $k - 1$ y $k + 1$. La recta así determinada en $\mathbb{G}(k, m)$ será:

$$L := \{\Lambda \in \mathbb{G}(k, m) \mid \Lambda_{k-1}^0 \subset \Lambda \subset \Lambda_{k+1}^0\},$$

y como subvariedad lineal es tanto de tipo α como de tipo β .

Las siguientes, en simplicidad, subvariedades de $\mathbb{G}(k, m)$, corresponden a la intersección de ésta con una subvariedad lineal de \mathbb{P}^N , las llamadas *variedades de Schubert*, que pasamos a describir.

Fijemos una bandera de $k + 1$ subespacios lineales de $\mathbb{P}(V)$: $\Lambda_0 \subsetneq \Lambda_1 \subsetneq \dots \subsetneq \Lambda_k$ (aquí, los subíndices sólo enumeran los subespacios, y no indican dimensión). Se define la *variedad de Schubert* asociada a esta bandera como el conjunto:

$$\Omega(\Lambda_0, \dots, \Lambda_k) := \{\Lambda \in \mathbb{G}(k, m) \mid \dim(\Lambda \cap \Lambda_i) \geq i, i = 0, \dots, k\}.$$

Se define un *ciclo de Schubert* como la clase de equivalencia en el anillo de Chow de una variedad de Schubert. Un ciclo de Schubert se denota por $\Omega(l_0, \dots, l_k)$, donde los enteros l_i , $i = 0, \dots, k$, son las dimensiones de los correspondientes subespacios Λ_i , de un representante de la clase. Es fácil verificar que

$$\dim \Omega(l_0, \dots, l_k) = \sum_{i=0}^k (l_i - i).$$

Un *ciclo de Schubert especial* es $\sigma^a = \Omega(m - k - a, m - k + 1, \dots, m)$, es decir, el ciclo de elementos en $\mathbb{G}(k, m)$ que cortan a un espacio lineal de dimensión $m - k - a$. Esto sólo tiene sentido para $0 \leq a \leq m - k = n - r$, y toda *variedad de Schubert especial* representante del ciclo σ^a es de codimensión a en $\mathbb{G}(k, m)$. Fijado un subespacio lineal en $\mathbb{P}(V)$ de dimensión $(m - k - a)$, Λ_{m-k-a}^0 , siempre que $0 \leq a \leq m - k$, la subvariedad de Schubert especial asociada es

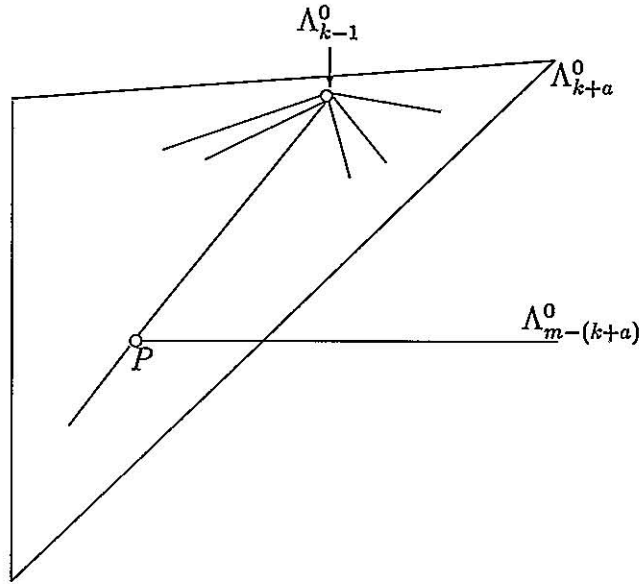
$$\Phi^a := \{\Lambda_k \in G(k, m) \mid \dim(\Lambda_k \cap \Lambda_{m-k-a}^0) \geq 0\},$$

y tiene codimensión a en $\mathbb{G}(k, m)$.

Supongamos fijados dos subespacios en $\mathbb{P}(V)$ de dimensiones complementarias, y en posición general, Λ_{k+a}^0 y $\Lambda_{m-(k+a)}^0$, en $\mathbb{P}(V)$, éstos se cortan en un único punto P . Si en Λ_{k+a}^0 fijamos además un subespacio, Λ_{k-1}^0 podemos considerar la subvariedad lineal de tipo α en $\mathbb{G}(k, m)$

$$\Phi_a := \{\Lambda_k \in \mathbb{G}(k, m) \mid \Lambda_{k-1}^0 \subset \Lambda_k \subseteq \Lambda_{k+a}^0\},$$

de dimensión a . El subespacio de dimensión k unívocamente determinado por P y Λ_{k-1}^0 en Λ_{k+a}^0 , constituye el único punto de intersección en $\mathbb{G}(k, m)$ de la subvariedad lineal Φ_a y la variedad de Schubert especial, Φ^a , asociada al subespacio Λ_{m-k-a}^0 . El siguiente gráfico muestra la situación recién descrita



Es también sencillo comprobar cómo una subvariedad lineal de tipo β , Ψ_a y una variedad de Schubert especial, Φ^a , de dimensiones complementarias, y definidas, respectivamente, por subespacios lineales en $\mathbb{G}(k, m)$ en posición general, tienen intersección vacía siempre que $a > 1$. El caso $a = 1$ corresponde a la subvariedad lineal recta de $\mathbb{G}(k, m)$, que es de ambos tipos de subvariedades lineales, Φ_1 y Ψ_1 , y por lo tanto interseca a toda variedad de Schubert especial de codimensión 1 definida en posición general con la recta, como se ha mostrado en el párrafo anterior. Recogemos este sencillo resultado en forma de lema:

Lema 6 Sean ϕ_a una subvariedad lineal de tipo α de dimensión a , y ϕ^a una subvariedad de Schubert especial en $\mathbb{G}(r, n)$ de codimensión a . Si $[\phi_a]$, $[\phi^a]$ son los ciclos asociados, entonces

$$[\phi_a] \cdot [\phi^a] = [P], \quad [P] \text{ la clase de un punto.}$$

Bajo las mismas hipótesis, pero con una subvariedad lineal de tipo β , ψ_a , la intersección $\psi_a \cap \phi^a$ es vacía (salvo el caso $a = 1$.)

1.6 Acciones de grupos

Recogemos en esta sección un sencillo resultado que utilizaremos en la construcción de ciertos cerrados de dimensión baja en R en el capítulo (3).

Lema 7 Sean X e Y esquemas irreducibles, con una acción en ambos de un grupo algebraico G irreducible, con:

- a) $G \times Y \longrightarrow Y$, acción transitiva;
 b) $G_y := \{g \in G \mid g \cdot y = y\}$, irreducible $\forall y \in Y$.

Entonces, para todo morfismo sobreyectivo G -equivariante

$$X \xrightarrow{f} Y,$$

y para todo elemento $y \in Y$, la fibra:

$$X_y := \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

es irreducible.

Demostración: Puesto que G actúa transitivamente en Y , y el morfismo es equivariante, todas las fibras son isomorfas. Así, basta probar el resultado para un $y \in Y$ general.

La dimensión de cualquier componente de la fibra X_y es mayor o igual que $n := \dim(X) - \dim(Y)$, por la semicontinuidad de la dimensión de las fibras. Por otra parte, esta dimensión ha de ser siempre n , pues de ser mayor, toda fibra tendría una subvariedad de dimensión mayor que n , de manera que la dimensión de X sería mayor que $\dim(Y) + n$.

Supongamos que la fibra X_y sobre un punto general $y \in Y$ tiene dos subconjuntos cerrados propios, $X_1, X_2 \subsetneq X_y$, tales que $X_y = X_1 \cup X_2$. Supongamos además que X_1 es irreducible. Sea $G_y \subset G$ el estabilizador de y , que es irreducible por hipótesis. Bajo estas condiciones, G_y actúa sobre X_1 . Efectivamente, dado un elemento $x_1 \in X_1$, la órbita

$$G_y \cdot x_1 := \{g \cdot x_1 \mid g \in G_y\} \subseteq X_y,$$

es irreducible, por serlo G_y , y por tanto ha de estar totalmente contenida en X_1 . En caso contrario, existiría un elemento $g \in G_y$ y un $x_1 \in X_1 \setminus (X_1 \cap X_2)$, con $x_2 := gx_1 \in X_2 \setminus (X_2 \cap X_1)$, de manera que la órbita de x_1 tendría al menos dos componentes.

Consideremos la acción de G sobre X_1 :

$$G \times X_1 \longrightarrow X,$$

con imagen $Z := \bigcup_{g \in G} g \cdot X_1$, que es en particular un conjunto constructible ([H], Cap. II, Ejercicio 3.19). Por lo anterior, es claro que

$$g \cdot X_1 \subseteq X_{g \cdot y}$$

es una componente irreducible en cada fibra. Además, si $h, g \in G$ son tales que $h \cdot y = g \cdot y$, entonces $h(X_1) = g(X_1)$, pues $h^{-1}g \in G_y$, y por tanto $h^{-1}g(X_1) = X_1$.

El conjunto $Z \subseteq X$ tiene dimensión:

$$\begin{aligned} \dim(Z) &= \dim(X_1) + \dim(Y) \\ &= \dim(X) - \dim(Y) + \dim(Y) \\ &= \dim(X). \end{aligned}$$

Ahora bien, X es irreducible, y por lo tanto $\overline{Z} = X$, por ser un cerrado en un irreducible de igual dimensión. Existe, por tanto, un abierto de Zariski, U , con $X \supseteq Z \supseteq U$ ([H], Cap. II, Ejercicio 3.18(b)).

Sea $X \setminus U = T_1 \cup \dots \cup T_k$, para ciertos cerrados T_i . Supongamos que ninguno de los cerrados T_i domina sobre Y . Sea entonces $y \in (Y \setminus \bigcup(f(T_i)))$. La fibra sobre y tendría al menos dos componentes, pero ambas se obtendrían a partir de X_1 por G , contradiciendo lo anterior.

Supongamos ahora que alguno de los cerrados T_i domina sobre Y . Sea $y \in Y$ un punto general. Cualquier componente X' de la fibra de y diferente de la componente de la forma $g(X_1)$, estará contenida en una T_{i_0} que domina Y . Pero $\dim(T_{i_0}) < \dim X$, y por tanto se tendría que $\dim(X') < n$, llegando de nuevo a contradicción.

□

Capítulo 2

Anillo de Chow: rangos

En este capítulo exponemos los resultados que sobre los rangos de los grupos de ciclos k -dimensionales, ($0 \leq k \leq \dim R$), aparecen probados en [Str]. Fijaremos además la notación usada en capítulos posteriores.

2.1 Algunos resultados de Bialynicki–Birula

Como en [Str], damos a continuación algunos resultados de A. Bialynicki–Birula [B1,B2].

Sea X una variedad proyectiva lisa con una acción del grupo multiplicativo $\Gamma = k^*$. Supongamos que el esquema de puntos fijos $X^\Gamma = \{x_1, \dots, x_p\}$ es finito, y para cada i , $1 \leq i \leq p$, sea $X_i = \{x \in X \mid \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \cdot x = x_i\}$. El grupo Γ actúa linealmente en el espacio tangente $T_{x_i}X$. Denotemos por T_i^+ el $k[\Gamma]$ -submódulo sobre el que Γ actúa con pesos positivos.

Teorema 2 (*Bialynicki–Birula*)

- (i) *Los X_i forman una descomposición celular de X , esto es, X tiene una filtración por cerrados $X = F_p \supseteq F_{p-1} \supseteq \dots \supseteq F_{-1} = \emptyset$ tal que cada $F_j \setminus F_{j-1}$ es uno de los X_i .*
- (ii) *Cada X_i es isomorfo a algún espacio afín, y $T_{x_i}X_i = T_i^+$ como subespacios de $T_{x_i}X$. En particular, X es racional.*
- (iii) *El anillo de Chow $A(X)$ es el grupo abeliano libre generado por las clases de los \overline{X}_i , y las equivalencias racional y numérica de ciclos en X coinciden.*

Para cada entero $k = 0, \dots, \dim X$, denotemos por $b_{2k}(X)$ el número de índices $i \in \{1, \dots, p\}$ tales que $\dim T_i^+ = k$, es decir, el número de células k -dimensionales de la descomposición. Se tiene entonces el siguiente

Corolario 1 $b_{2k}(X) = \text{rango}_Z A^k(X)$.

En el caso particular en que el cuerpo base es \mathbb{C} , $A^k(X) \simeq H^{2k}(X, \mathbb{N})$, y las cohomologías impares se anulan. Así los $b_{2k}(X)$ son los números de Betti de la variedad compleja X . En particular, la característica de Euler topológica es

$$\chi_{\text{top}}(X) = \sum_{k=0}^{\dim X} b_{2k}(X) = p = \text{cardinal de } X^\Gamma.$$

2.2 Números de Betti

Describimos a continuación la acción de Γ sobre R con puntos fijos aislados, que aparece en [Str]. Esta da una descomposición celular de R que nos permite obtener sus números de Betti y su característica de Euler.

Identifiquemos los puntos de R con subhaces A de $V_{\mathbb{P}^1} := V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ con rango $n - r$ y grado $-d$. El grupo $GL(V)$ actúa sobre R de manera natural: Si $g \in GL(V)$, entonces $g(A) := gA \subseteq V_{\mathbb{P}^1}$, donde gA es la imagen de A bajo el automorfismo inducido $\pi^*(g)$ de $V_{\mathbb{P}^1}$. Fijemos un toro maximal $T \subseteq GL(V)$; entonces el $k[T]$ -módulo V descompone como suma directa de representaciones 1-dimensionales V_i ($1 \leq i \leq n$). Si $f_i \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_i))$ es una forma de grado d_i , denotamos por

$$f_i V_i(-d_i) \subseteq (V_i)_{\mathbb{P}^1}$$

la imagen de la aplicación $(V_i)_{\mathbb{P}^1} \otimes \mathcal{O}(-d_i) \rightarrow (V_i)_{\mathbb{P}^1}$ inducida por f_i . Con esta notación se tiene la siguiente descripción de los puntos fijos de R bajo la acción de T :

Proposición 8 *El punto $(A \subseteq V_{\mathbb{P}^1})$ de R queda fijo por la acción de T si y sólo si éste puede escribirse en la forma*

$$A = \bigoplus_{i=1}^n \delta_i f_i V_i(-d_i),$$

donde cada δ_i es 0 ó 1.

Obsérvese que el rango y el grado de A implican las relaciones

$$\sum_i \delta_i = n - r, \quad \sum_i \delta_i d_i = d.$$

Además, si $\delta_i = 1$ entonces d_i queda unívocamente determinado y f_i es único salvo un escalar no cero.

Para obtener puntos fijos aislados, consideremos coordenadas homogéneas $X, Y \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ sobre \mathbb{P}^1 y sea T' un toro 1-dimensional de $SL(2)$ actuando sobre $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ (y por lo tanto sobre \mathbb{P}^1) en la forma $X \mapsto tX$, $Y \mapsto t^{-1}Y$ ($t \in T'$). Existe una acción inducida en R que conmuta con la acción de $T \subseteq GL(V)$, y por lo tanto una acción de $T \times T'$ sobre R . Un punto ($A \subseteq V_{\mathbb{P}^1}$) queda fijo bajo la acción de $T \times T'$ si y sólo si queda fijo por la acción de ambos toros. Pero el punto $(\oplus \delta_i f_i V_i(-d_i) \subseteq V_{\mathbb{P}^1})$ queda fijo por T' si y sólo si todos los f_i son monomios en X, Y . Esto motiva la siguiente definición

Definición. Sea $F \subseteq \mathbb{N}^{3n}$ el conjunto de sucesiones $(\alpha, \beta, \delta) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n, \delta_1, \dots, \delta_n)$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

- (i) $\sum \delta_i = s := n - r$, $\sum \delta_i(\alpha_i + \beta_i) = d$;
- (ii) $\alpha_i = \beta_i = 0$ siempre que $\delta_i = 0$;
- (iii) cada δ_i es 0 ó 1.

Para cada $(\alpha, \beta, \delta) \in F$, sea $r(\alpha, \beta, \delta) \in R$ el punto (cerrado) dado por

$$(\oplus \delta_i X^{\alpha_i} Y^{\beta_i} V_i(-\alpha_i - \beta_i) \subseteq V_{\mathbb{P}^1}).$$

Se tiene el siguiente resultado [Str]:

Teorema 3 *La aplicación $r : F \rightarrow R$ es una biyección sobre el lugar de puntos fijos $R^{T \times T'}$.*

Observación. Existe un toro 1-dimensional $\Gamma \subseteq T \times T'$ tal que $R^\Gamma = R^{T \times T'}$, es decir, con puntos fijos aislados. Tenemos así el siguiente

Teorema 4 *La característica topológica de Euler de R es*

$$\chi_{\text{top}} = \text{rang}_\mathbb{N} A(R) = |F| = \binom{n}{r} \binom{d + 2(n - r) - 1}{d}.$$

Recogemos, por último, una fórmula implícita para los números de Betti $b_{2k}(R)$ dada en [Str].

Sea $h : F \rightarrow \mathbb{N}$ la aplicación definida por

$$h(\alpha, \beta, \delta) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\delta_i \delta_j (\alpha_j + \beta_j) + \delta_i (1 - \delta_j) (\alpha_i + \beta_i + 1)) + \sum_{i=1}^n \delta_i \beta_i.$$

Sea $F_k \subseteq F$ el conjunto definido por:

$$F_k = \{(\alpha, \beta, \delta) \in F \mid h(\alpha, \beta, \delta) = k\}.$$

Se demuestra en [Str] el siguiente teorema:

Teorema 5 *Con las notaciones anteriores:*

$$b_{2k}(R) = \text{rango } A^k(R) = |F_k|. \quad (2.1)$$

2.2.1 La aplicación h

Hacemos ahora un sencillo estudio de la aplicación $h : F \rightarrow \mathbb{N}$, esto es, la aplicación dada por

$$h(\alpha, \beta, \delta) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\delta_i \delta_j (\alpha_j + \beta_j) + \delta_i (1 - \delta_j) (\alpha_i + \beta_i + 1)) + \sum_{i=1}^n \delta_i \beta_i,$$

donde

- $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{N}^n$
- $\sum \delta_i = n - r := s, \quad \delta_i = 0 \text{ ó } 1.$
- $\sum \delta_i (\alpha_i + \beta_i) = d$
- $\alpha_i = \beta_i = 0$ si $\delta_i = 0$.

De otra manera, se consideran vectores $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{N}^n$ de la forma:

$$\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \delta_n)$$

s coordenadas son 1,
r coordenadas son 0;

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$$

al menos r coordenadas son 0,
las mismas que las de δ ;

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n)$$

al menos r coordenadas son 0,
las mismas que las de α y δ .

Esta descripción nos permite descomponer el conjunto F en $N = \binom{n}{r}$ subconjuntos disjuntos. Denotemos por $\Delta[n, r]$ el conjunto de vectores δ con

$n - r$ coordenadas igual a 1 y r coordenadas 0. Es claro que $|\Delta[n, r]| = N$. Supongamos dada una ordenación en $\Delta[n, r]$, y sea $\delta[i]$ el elemento i -ésimo en esa ordenación. Podemos entonces escribir F como la unión disjunta

$$F = \bigsqcup_{i=1}^N F^i$$

siendo

$$F^i := \{(\alpha, \beta, \delta) \in F \mid \delta = \delta[i]\},$$

y donde, además, $|F^i| = \binom{d+2(n-r)-1}{d}$.

La restricción de h a cada F^i , que denotaremos h_i , plantea N tipos, en principio distintos, de sumas:

$$h_1, h_2, \dots, h_N.$$

Veamos con algunos ejemplos a qué nos estamos refiriendo.

Ejemplo 1 $n = 4, r = 1, \binom{4}{1} = 4$.

$$\Delta[4, 1] = \{(0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}.$$

$$\begin{aligned} h_1 &= \alpha_3 + 2\alpha_4 + \beta_2 + 2\beta_3 + 3\beta_4 \\ h_2 &= \alpha_4 + \beta_1 + \beta_3 + 2\beta_4 + d + 1 \\ h_3 &= \alpha_2 + \alpha_4 + \beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_4 + d + 2 \\ h_4 &= \alpha_2 + 2\alpha_3 + \beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 + d + 3. \end{aligned}$$

Se tienen además las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} 0 &\leq h_1 \leq 3d \\ d + 1 &\leq h_2 \leq 3d + 1 \\ d + 2 &\leq h_3 \leq 3d + 2 \\ d + 3 &\leq h_4 \leq 4d + 3. \end{aligned}$$

Ejemplo 2 $n = 4, r = 2, \binom{4}{2} = 6$.

$$\Delta[4, 2] = \{ (0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), \\ (1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0) \}.$$

$$\begin{aligned} h_1 &= \alpha_4 + \beta_3 + 2\beta_4 \\ h_2 &= d + 1 + \beta_2 + \beta_4 \\ h_3 &= d + 2 + \alpha_3 + \beta_2 + 2\beta_3 \\ h_4 &= d + 2 + \alpha_1 + 2\beta_1 + \beta_4 \\ h_5 &= 2d + 3 + \beta_1 + \beta_3 \\ h_6 &= 2d + 4 + \alpha_2 + \beta_1 + 2\beta_2. \end{aligned}$$

Se tienen además las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} 0 &\leq h_1 \leq 2d \\ d+1 &\leq h_2 \leq 2d+1 \\ d+2 &\leq h_3, h_4 \leq 3d+2 \\ 2d+3 &\leq h_5 \leq 3d+3 \\ 2d+4 &\leq h_6 \leq 4d+4. \end{aligned}$$

Ejemplo 3 $n = 5, r = 2, \binom{5}{2} = 10$.

$$\Delta[5, 2] = \{ (0, 0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1), \\ (0, 1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1, 0), \\ (1, 0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0) \}.$$

$$\begin{aligned} h_1 &= \alpha_5 + \beta_4 + 2\beta_5 \\ h_2 &= d + 1 + \beta_3 + \beta_5 \\ h_3 &= d + 2 + \alpha_4 + \beta_3 + 2\beta_4 \\ h_4 &= d + 2 + \alpha_2 + 2\beta_2 + \beta_5 \\ h_5 &= 2d + 3 + \beta_2 + \beta_4 \\ h_6 &= 2d + 4 + \alpha_3 + \beta_2 + 2\beta_3 \\ h_7 &= d + 3 + 2\alpha_1 + 3\beta_1 + \beta_5 \\ h_8 &= 2d + 4 + \alpha_1 + 2\beta_1 + \beta_4 \\ h_9 &= 3d + 5 + \beta_1 + \beta_3 \\ h_{10} &= 3d + 6 + \alpha_2 + \beta_1 + 2\beta_2 \end{aligned}$$

Ejemplo 4 $n = n, r = 1, \binom{n}{1} = n$.

Una de estas n sumas, la correspondiente al caso

$$\delta[1] = (0, 1, \dots, 1)$$

es

$$\begin{aligned} h_1 &= \alpha_3 + 2\alpha_4 + 3\alpha_5 + \dots + (n-2)\alpha_n \\ &\quad + \beta_2 + 2\beta_3 + 3\beta_4 + \dots + (n-1)\beta_n. \end{aligned}$$

Ejemplo 5 $n = n, r = 2, \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Tomemos como antes el caso:

$$\delta[1] = (0, 0, 1, \dots, 1),$$

siendo la suma correspondiente

$$\begin{aligned} h_1 &= \alpha_4 + 2\alpha_5 + 3\alpha_6 + \dots + (n-3)\alpha_n \\ &\quad + \beta_3 + 2\beta_4 + 3\beta_5 + \dots + (n-2)\beta_n. \end{aligned}$$

Estos ejemplos nos motivan el siguiente:

Lema 9 Dado $h(\alpha, \beta, \delta)$ como antes, si δ es de la forma

$$\delta = (\delta^r, \delta^s)$$

con $\delta^k \in \mathbb{N}^k$, y $\delta^r \neq 0$, entonces

$$h(\cdot, \cdot, \delta) > d.$$

Demostración: La demostración es un sencillo ejercicio de observación.

Sea δ_{j_0} el primer elemento no nulo en el vector δ ($j_0 \leq r$). Por este primer 1 se obtienen, al menos, los sumandos:

$$\begin{array}{ll} & \alpha_j + \beta_j \\ \text{y} & \alpha_{j_0} + \beta_{j_0} + 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \forall j > j_0 \\ \text{para el correspondiente } 0 \\ \text{de la 2ª parte.} \end{array}$$

Así la suma h es al menos $d + 1$. □

También obtenemos un sencillo resultado sobre el caso general mencionado en los ejemplos 4 y 5:

Lema 10 Dado $h(\alpha, \beta, \delta)$ como antes, si δ es de la forma

$$\delta[1] = (0, \dots, \overset{r}{0}, 1, \dots, 1)$$

$$\text{entonces, } h(\alpha, \beta, \delta[1]) = \sum_{j=2}^{n-r} (j-1)\alpha_{r+j} + \sum_{j=1}^{n-r} j\beta_{r+j}.$$

Denotemos por

$$h_1 = h(\alpha, \beta, \delta[1]).$$

La suma es:

$$\begin{aligned} h_1 = & \alpha_{r+2} + 2\alpha_{r+3} + \dots + (n-r-1)\alpha_n \\ & + \beta_{r+1} + 2\beta_{r+2} + 3\beta_{r+3} \dots + (n-r)\beta_n. \end{aligned}$$

Visto así, h_1 indica el grado de un monomio mónico en $2n - (2r+1)$ variables, siendo de pesos $1, 2, \dots, (n-r-1)$ dos de ellas, y una variable de peso $(n-r)$.

Capítulo 3

Bases para los grupos $A^k(R)$ con $k < d$

En este capítulo se describen bases geoméricamente sencillas para los grupos de Chow $A^k(R)$ y $A^{\dim(R)-k}$, siempre que k sea menor que el grado prefijado d . Con geoméricamente sencillas queremos dar a entender que en su construcción intervienen, como veremos, ciclos de Schubert de la Grassmanniana $\text{Gr}(r, V)$ que aparece en la definición de R .

La descripción geométrica se basa en que tenemos una aplicación de evaluación de un abierto U de $\mathbb{P}^1 \times R$ en $\text{Gr}(r, V)$. De esta manera podemos imponer condiciones del tipo pasar por $H \subset \text{Gr}(r, V)$, ciclo de Schubert. Esta aplicación de evaluación no está bien definida en el esquema $\mathbb{P}^1 \times R$, pero podemos extenderla a otro esquema, \tilde{Q} , que veremos es irreducible y birracional con $\mathbb{P}^1 \times R$.

3.1 Aplicación de evaluación

Sea $\mathcal{Q} := \mathbb{P}^1 \times R$, denotemos por $\mathcal{O}_{\mathcal{Q}}^n := V \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}$, y sea \mathcal{E} el cociente universal del haz $\mathcal{O}_{\mathcal{Q}}^n$, es decir, sea

$$0 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}^n \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0 \quad (3.1)$$

la sucesión exacta universal sobre \mathcal{Q} , donde \mathcal{E} es un haz de rango r que no es en general localmente libre. Sea U el abierto de \mathcal{Q} sobre el que \mathcal{E} es localmente libre ($U \supseteq \mathbb{P}^1 \times R^0$). Sobre U tenemos entonces un morfismo natural f , la aplicación de evaluación

$$U \xrightarrow{f=ev} \text{Gr}(r, V)$$

dada por la propiedad universal de la Grassmanniana $\text{Gr}(r, V)$ (ver Cap.1, §1.2.)

La aplicación f no extiende a \mathcal{Q} pues en los puntos (x, q) de $\mathcal{Q} \setminus U$, el cociente de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^n$ tiene fibra en x de dimensión $\geq r+1$. Este tiene la forma:

$$E_{d-n} \bigoplus T,$$

siendo E_{d-n} localmente libre de rango r y grado $d-n$, y T haz de torsión de grado total n , con $0 < n < d$. De esta manera las fibras en los puntos $x_i \in \text{sup}(T)$ son de la forma $E_{x_i} \oplus T_{x_i}$, y tienen dimensión $\geq r+1$, esto es:

$$\dim(\text{Gr}(r, E_{x_i} \oplus T_{x_i})) \geq 1,$$

y la elección de la imagen $f(x, q)$ no es única.

Nos interesará, sin embargo, tener una aplicación de evaluación completamente definida. El esquema descrito en la siguiente sección nos resuelve el problema, al considerar, dado un cociente con fibras de rango mayor que r , todos los cocientes de éste de rango r .

3.1.1 Extensión de la aplicación de evaluación

En concreto, sea $\tilde{\mathcal{Q}} := \text{Gr}(r, \mathcal{E})$ la Grassmanniana de cocientes de rango r de \mathcal{E} (ver, Cap.1 §1.1). El esquema $\tilde{\mathcal{Q}}$ tiene una inmersión natural

$$\text{Gr}(r, \mathcal{E}) \subseteq \text{Gr}(r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times R}^n),$$

(cf. EGA I, 9.7.8.), es decir:

$$\tilde{\mathcal{Q}} \subseteq \mathbb{P}^1 \times R \times \text{Gr}(r, V).$$

El morfismo de \mathcal{E} en $\mathbb{P}^1 \times R$ induce un morfismo natural $\pi_1 : \tilde{\mathcal{Q}} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times R$ que es propio. Además $\tilde{\mathcal{Q}}$ tiene un abierto isomorfo por π_1 al abierto U sobre el que \mathcal{E} es localmente libre, que denotaremos $\tilde{\mathcal{Q}}^0$. La clausura de este último en $\tilde{\mathcal{Q}}$ es irreducible de dimensión $= \dim(\mathbb{P}^1 \times R)$. La subida de la sucesión (3.1) a $\tilde{\mathcal{Q}}$:

$$0 \rightarrow \pi_1^* M \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Q}}}^n \rightarrow \pi_1^* \mathcal{E} \rightarrow 0, \quad (3.2)$$

aporta una sucesión exacta sobre $\tilde{\mathcal{Q}}$.

Se tiene además una sucesión exacta universal sobre $\tilde{\mathcal{Q}}$:

$$0 \rightarrow N_{\tilde{\mathcal{Q}}} \rightarrow \pi_1^* \mathcal{E} \rightarrow E_{\tilde{\mathcal{Q}}} \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

con cociente localmente libre de rango r y con la siguiente propiedad universal. Dados un morfismo

$$f : T \rightarrow \mathbb{P}^1 \times R,$$

y un (salvo isomorfismo) cociente localmente libre de rango r , $f^* \mathcal{E} \rightarrow K$, existe un único levantamiento $\tilde{f} : T \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{\mathcal{Q}} \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \pi_1 \\ T & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^1 \times R \end{array}$$

conmuta, y

$$(f^* \mathcal{E} \rightarrow K) = \tilde{f}^* (\pi_1^* \mathcal{E} \rightarrow E_{\tilde{\mathcal{Q}}}).$$

Efectivamente, en la notación de la sección 1.1 del capítulo 1, el esquema $\tilde{\mathcal{Q}}$ representa el funtor contravariante $\mathcal{F}_{p,\mathcal{E}}$, de manera que tenemos una biyección de conjuntos:

$$\mathcal{F}_{p,\mathcal{E}}(T) \stackrel{\Phi}{\cong} \text{Hom}_S(T, \tilde{\mathcal{Q}}).$$

El cociente universal, $E_{\tilde{\mathcal{Q}}}$, es un haz sobre $\tilde{\mathcal{Q}}$ cuya fibra en un punto $q \in \tilde{\mathcal{Q}}$ es el cociente libre de rango r de $\mathcal{E}_{\pi_1(q)}$ que define a q . El epimorfismo composición

$$\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Q}}}^n \rightarrow E_{\tilde{\mathcal{Q}}} \rightarrow 0,$$

dado por las sucesiones exactas (3.2) y (3.3), determina una función:

$$\tilde{\mathcal{Q}} \xrightarrow{F \equiv \text{ev}} \text{Gr}(r, V), \quad (3.4)$$

dada por la propiedad universal de $\text{Gr}(r, V)$. La imagen de un punto $q \in \tilde{\mathcal{Q}}$, $F(q)$, será el cociente libre de rango r que define a q , visto como punto en $\text{Gr}(r, V)$.

En la siguiente sección vamos a caracterizar $\tilde{\mathcal{Q}}$ como subesquema de ceros de una sección de cierto fibrado sobre el esquema $\mathcal{G} := \text{Gr}(r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times R}^n)$.

Realizamos a continuación un breve estudio de este esquema $\tilde{\mathcal{Q}}$, cuyas propiedades nos interesará conocer para construcciones posteriores.

3.1.2 Propiedades de $\tilde{\mathcal{Q}}$

Denotemos por $\mathcal{G} := \text{Gr}(r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times R}^n) = \mathbb{P}^1 \times R \times \text{Gr}(r, V)$. Sobre \mathcal{G} tenemos una sucesión exacta universal:

$$0 \rightarrow N_{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{G}}^n \rightarrow E_{\mathcal{G}} \rightarrow 0, \quad (3.5)$$

con $E_{\mathcal{G}}$ cociente localmente libre de rango r . La subida por el morfismo de proyección, $\pi : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times R$, de la sucesión exacta sobre $\mathbb{P}^1 \times R$ (3.1), nos aporta una sucesión exacta sobre \mathcal{G} :

$$0 \rightarrow \pi^* \mathcal{M} \rightarrow \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times R}^n \rightarrow \pi^* \mathcal{E} \rightarrow 0, \quad (3.6)$$

donde $\pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times R}^n = \mathcal{O}_{\mathcal{G}}^n$. Tenemos así un cociente $\pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times R}^n \rightarrow \pi^* \mathcal{E} \rightarrow 0$, y por tanto una inmersión, $i : \tilde{\mathcal{Q}} \hookrightarrow \mathcal{G}$. Además, si denotamos por $\tilde{\mathcal{Q}}$ a la imagen de $i(\tilde{\mathcal{Q}}) \subseteq \mathcal{G}$, ésta tiene la siguiente propiedad universal (cf proposición (2) en el capítulo (1)): para todo morfismo $f : T \rightarrow \mathbb{P}^1 \times R$, y todo cociente $\mathcal{O}_T^n \rightarrow E_r$, con E_r localmente libre de rango r , que factorice a través de $f^* \mathcal{E}$, existe un único levantamiento $\tilde{f} : T \rightarrow \mathcal{G}$, con imagen contenida en $\tilde{\mathcal{Q}}$.

Consideremos el diagrama dado por las sucesiones (3.6) y (3.5):

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \pi^* \mathcal{M} & \xrightarrow{v} & \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times R}^n & & \\ & & & & \parallel & \searrow \psi & \\ & & & & \mathcal{O}_{\mathcal{G}}^n & \rightarrow & E_{\mathcal{G}} \rightarrow 0 \end{array}$$

y denotemos por $g : \pi^* \mathcal{M} \rightarrow E_{\mathcal{G}}$, el morfismo composición $\psi \circ v$. Si consideramos g como elemento de $H^0(\pi^* \mathcal{M}^\vee \otimes E_{\mathcal{G}})$, podemos considerar el esquema $Z := (g)_0$, de ceros de g , que será cierto subesquema de \mathcal{G} .

Proposición 11 *Con las notaciones anteriores, los subesquemas $\tilde{\mathcal{Q}}$ y Z de \mathcal{G} , coinciden.*

Demostración: Veamos, en primer lugar que $\tilde{Q} \subseteq Z$. Sea $E_{\tilde{Q}}$ el fibrado cociente universal de rango r sobre \tilde{Q} :

$$\pi^* \mathcal{E} \longrightarrow E_{\tilde{Q}}.$$

La composición

$$\begin{array}{ccc} \pi^* \mathcal{O}^n & \longrightarrow & \pi^* \mathcal{E} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & E_{\tilde{Q}} \end{array}$$

determina el morfismo

$$\tilde{Q} \xrightarrow{i} \mathcal{G}.$$

Es claro, por otra parte, que el morfismo composición h :

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow \pi^* \mathcal{M} & \longrightarrow & \pi^* \mathcal{O}^n \\ & \searrow h & \downarrow \\ & & E_{\tilde{Q}} \end{array}$$

es idénticamente nulo, de manera que la imagen de i está dentro de $Z := (g)_0$.

Veamos ahora cómo $Z \subseteq \tilde{Q}$. Sobre Z el morfismo

$$\psi : \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times R}^n \longrightarrow E_{\mathcal{G}},$$

del diagrama anterior, factoriza a través de $\pi^* \mathcal{E}$. Efectivamente, sobre Z es claro que $g \equiv 0$, de manera que existe un morfismo $\bar{\psi} : \pi^* \mathcal{E}|_Z \rightarrow E_{\mathcal{G}}|_Z$, que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow \pi^* \mathcal{M}|_Z & \longrightarrow & \pi^* \mathcal{O}|_Z^n & \xrightarrow{u} & \pi^* \mathcal{E}|_Z & \longrightarrow & 0 \\ & \searrow o & \downarrow \psi & & \swarrow \bar{\psi} & & \\ & & E|_Z & & & & \end{array}$$

siendo además $\bar{\psi}$ sobreyectivo. La propiedad universal de \tilde{Q} nos asegura así que el morfismo inclusión

$$Z \xrightarrow{j} \mathcal{G}$$

tiene imagen Z contenida en \tilde{Q} . □

Tenemos, por lo tanto, una caracterización de \tilde{Q} como lugar de ceros de una sección de un fibrado sobre \mathcal{G} , $\mathcal{F} := \pi^* \mathcal{M}^\vee \otimes E_{\mathcal{G}}$, de rango $r \cdot (n - r)$. Este último hecho nos permite demostrar el siguiente resultado:

Proposición 12 *El esquema $\tilde{\mathcal{Q}}$ es irreducible.*

Demostración: Por ser $\tilde{\mathcal{Q}}$ lugar de ceros en \mathcal{G} , de una sección de un fibrado de rango $r(n - r)$, toda componente irreducible de $\tilde{\mathcal{Q}}$ tendrá codimensión a lo más $r(n - r)$ en un espacio de dimensión:

$$\dim(\mathbb{P}^1 \times R) + \dim(\mathrm{Gr}(r, V)) = \dim(\mathbb{P}^1 \times R) + r(n - r),$$

esto es, toda componente irreducible de $\tilde{\mathcal{Q}}$ tiene, al menos, la dimensión del esquema $\mathbb{P}^1 \times R$. Ahora bien, por construcción, sabemos que en $\tilde{\mathcal{Q}}$ tenemos un abierto, $\tilde{\mathcal{Q}}^0$ con clausura irreducible de esta dimensión. La imagen por el morfismo natural

$$\pi : \tilde{\mathcal{Q}} \longrightarrow R,$$

del abierto $\tilde{\mathcal{Q}}^0$ contiene al abierto $R^0 \subset R$ de cocientes libres. Denotemos por X_0 la componente irreducible que contiene al abierto $\tilde{\mathcal{Q}}^0$. Supongamos que existe otra componente, X' . Por lo anterior sabemos que ésta ha de tener dimensión mayor o igual que la de X_0 , esto es:

$$\dim(X') \geq \dim(X_0) = \dim(\mathbb{P}^1 \times R).$$

Consideremos en $\mathbb{P}^1 \times R$ los cerrados

$$Y_j := \{q \in \mathbb{P}^1 \times R \mid \dim(\pi^{-1}(q)) \geq j\}$$

para $j > 0$. Sea X' un cerrado en $\tilde{\mathcal{Q}}$ con $\tilde{\mathcal{Q}} = X_0 \cup X'$. Si suponemos que $\tilde{\mathcal{Q}} \neq X_0$, existirá un j mínimo, digamos j_0 , tal que la proyección $\pi_1 : \tilde{\mathcal{Q}} \longrightarrow \mathbb{P}^1 \times R$ restringida a X' tiene imagen contenida en Y_{j_0} . De esta manera la dimensión de un tal X' será:

$$\dim(X') = \dim(Y_{j_0}) + j_0.$$

Veamos cuál es la dimensión de un Y_j cualquiera. Primeramente hemos de observar que los j son enteros de la forma:

$$j = \dim(\mathrm{Gr}(r, r + m)) = r \cdot m,$$

para ciertos enteros positivos m . Concretamente, si un punto general $q \in Y_j$ es de la forma:

$$q = (x, (\mathcal{O}^n \longrightarrow E_r \oplus T)),$$

el haz cociente es suma directa de una parte localmente libre, E_r , de rango r y grado $d' = d - m < d$, y una parte de torsión, T , con $h^0(T) = m$. Las fibras de este tipo de cocientes es de rango r , salvo en los puntos del soporte del haz de torsión que tienen rango $r + m$.

Por otra parte, observamos que para medir la dimensión de un Y_j , basta tomar los cocientes de la forma:

$$E \oplus T,$$

con E libre de rango r y grado $d-m$, T haz de torsión con $|\text{sop}(T)| = 1$ y con $h^0(T) = m$. Un tal tipo de cocientes es el punto general en el subesquema $X_m \subseteq R$ (cf Capítulo 1, 1.4, Proposición 5). Así, la dimensión de un Y_j será:

$$\dim(Y_j) = nd + r(n-r) + 1 - m(r+1),$$

donde $rm = j$ y, en definitiva:

$$\dim(X') = \dim(Y_j) + j = nd + r(n-r) + 1 - m < \dim(X_0).$$

□

Este mismo argumento muestra cómo un producto fibrado $\tilde{\mathcal{Q}} \times_R \cdots \times_R \tilde{\mathcal{Q}}$ no será en general irreducible. Consideremos en $\overline{\mathcal{Q}}_n := \tilde{\mathcal{Q}} \times_R \cdots \times_R \tilde{\mathcal{Q}}$ el abierto:

$$\tilde{\mathcal{Q}}_0 := \{(q_1, q_2, \dots, q_n) \in \overline{\mathcal{Q}}_n \mid q_i \neq q_j, \forall i \neq j\},$$

y denotemos por $\tilde{\mathcal{Q}}_n$ su clausura. Esta es irreducible, dominante sobre R , y tiene dimensión

$$\dim(\tilde{\mathcal{Q}}_n) = (n-1) + \dim(\tilde{\mathcal{Q}}).$$

Sea Y_m un cerrado en $\mathbb{P}^1 \times R$ de la forma

$$Y_m := \{q \in \mathbb{P}^1 \times R \mid \dim(\pi_1^{-1}(q)) \geq rm\}$$

para algún $m > 0$. Sea $X_m := \pi_1^{-1}(Y_m)$ la imagen inversa en $\tilde{\mathcal{Q}}$ dada por el morfismo natural $\pi_1 : \tilde{\mathcal{Q}} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times R$, de dimensión

$$\dim(X_m) = nd + r(n-r) + 1 - m(r+1).$$

Sea F_m el producto fibrado:

$$F_m := X_m \times_R \cdots \times_R X_m \subseteq \overline{\mathcal{Q}}_n.$$

de dimensión

$$\begin{aligned} \dim(F_m) &\geq (n-1) + \dim(X_m) + n(rm) \\ &= (n-1) + nd + r(n-r) + 1 - m(r+1) + n(rm) \\ &= \dim(\tilde{\mathcal{Q}}_n) + (n-1)rm - m. \end{aligned}$$

De esta manera, siempre es posible encontrar, para $n \geq 2$, componentes distintas de la componente $\tilde{\mathcal{Q}}_n$, de dimensión, al menos, la de $\tilde{\mathcal{Q}}_n$.

3.2 Cerrados básicos de dimensión alta

De las secciones anteriores, sabemos que tenemos una aplicación de evaluación

$$F : \tilde{\mathcal{Q}} \longrightarrow \text{Gr}(r, V), \quad (3.7)$$

que extiende la aplicación de evaluación natural:

$$\text{ev} : \mathbb{P}^1 \times R^0 \longrightarrow \text{Gr}(r, V). \quad (3.8)$$

Describiremos sus imágenes, y construiremos subesquemas cerrados en $\tilde{\mathcal{Q}}$ como la imagen recíproca de subesquemas cerrados de $\text{Gr}(r, V)$. Estos definirán, a su vez, subesquemas cerrados en R , por medio de la proyección natural:

$$\pi : \tilde{\mathcal{Q}} \longrightarrow R.$$

Análogamente, vía la proyección

$$\pi_1 : \tilde{\mathcal{Q}} \longrightarrow \mathbb{P}^1 \times R,$$

podremos definir subesquemas cerrados en $\mathbb{P}^1 \times R$, como imágenes de los cerrados en $\tilde{\mathcal{Q}}$ anteriores. La intersección de éstos con cerrados en $\mathbb{P}^1 \times R$ de la forma

$$Z := \{x_0\} \times R,$$

nos definirán, a su vez, nuevos cerrados en R , como imágenes directas por la segunda proyección:

$$\pi_{2Z} : \{x_0\} \times R \longrightarrow R.$$

Ambos tipos de cerrados, tendrán una interpretación geométrica sencilla en $\text{Gr}(r, V)$, como conjuntos de curvas racionales que verifican ciertas condiciones de paso por los subesquemas cerrados de $\text{Gr}(r, V)$ iniciales.

Imágenes de F

Fijado un punto $\varphi \in R^0$, la imagen por F de $\pi_1^{-1}(\mathbb{P}^1 \times \{\varphi\})$ viene dada por la curva en $\text{Gr}(r, V)$ imagen de \mathbb{P}^1 por φ (como ya vimos en el Capítulo 1, §1.2), pues en este caso, la aplicación F coincide con la evaluación natural sobre R^0 .

Consideremos, por otra parte, un cociente $r \in R$ de la forma:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^n \longrightarrow E \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{T}_i$$

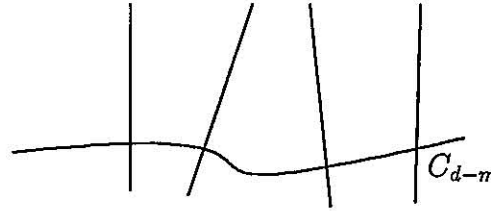
donde E es localmente libre de rango r , $T = \oplus \mathcal{T}_i$, haz de torsión soportado en m puntos distintos x_1, \dots, x_m , con fibras T_{x_i} de rango 1. El grado de la parte libre es $d - m$, pues el cociente ha de tener grado total:

$$d = \deg(E) + h^0(\oplus \mathcal{C}_i) = \deg(E) + m.$$

La parte libre de este cociente, determina así un morfismo de grado $d - m$ de \mathbb{P}^1 en $\text{Gr}(r, V)$. Su imagen es una curva racional en $\text{Gr}(r, V)$, y, si el morfismo es inyectivo, tendrá grado $d - m$. La denotaremos por C_{d-m} , y la representaremos gráficamente por:



Cada uno de los m puntos en el soporte de la parte de torsión, determinan m puntos distinguidos en la curva C_{d-m} y sendas rectas apoyadas en ellos, dadas por $\text{Gr}(r, E_{x_i} \oplus T_{x_i})$, gráficamente:



Cerrados básicos en R

Nos referiremos aquí al lema 7 de la sección §1.6 del Capítulo 1. Si denotamos por G el grupo $PGL(n)$, éste actúa de manera natural en $\text{Gr}(r, V)$, en R , y en \tilde{Q} . El morfismo F es equivariante, los esquemas \tilde{Q} y $\text{Gr}(r, V)$ son irreducibles, y la acción es transitiva en $\text{Gr}(r, V)$. Podemos por tanto aplicar el lema citado y concluir el siguiente resultado:

Proposición 13 *Dado un cerrado irreducible $D \subseteq \text{Gr}(r, V)$, el subesquema*

$$\tilde{D} := F^{-1}(D) \subseteq \tilde{Q},$$

es cerrado e irreducible en \tilde{Q} .

Fijadas las notaciones:

$$\begin{aligned} Z &:= \{x_0\} \times R \subseteq \mathbb{P}^1 \times R, \\ \pi_1: \tilde{Q} &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \times R \quad \text{y} \\ \pi_2: \mathbb{P}^1 \times R &\longrightarrow R, \text{ las aplicaciones naturales,} \\ \pi &:= \pi_2 \circ \pi_1, \\ \pi_Z &:= \pi_2|_Z \circ \pi_1|_{\tilde{Z}}, \quad \tilde{Z} := \pi_1^{-1}(Z) \\ F: \tilde{Q} &\longrightarrow \text{Gr}(r, V), \text{ la aplicación de evaluación,} \end{aligned}$$

definimos los siguientes subesquemas de R :

$$\begin{aligned} X_1(D) &:= \pi(\tilde{D}), \\ X_2(D) &:= \pi_Z(\tilde{D}). \end{aligned}$$

Por construcción se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \text{codim}(\tilde{D}, \tilde{Q}) &= \text{codim}(D, \text{Gr}(r, V)), \text{ y por tanto:} \\ \dim(\tilde{D}) &= \dim(X_1(D)) + 1 \\ &= \dim(X_2(D)). \end{aligned}$$

Así, siendo ℓ la codimensión de D en $\text{Gr}(r, V)$, tenemos las siguientes dimensiones:

$$\begin{aligned} \dim(X_1(D)) &= 4d + 3 - (\ell - 1), \\ \dim(X_2(D)) &= 4d + 3 - (\ell). \end{aligned}$$

Podemos representar geoméricamente estos cerrados, vía la aplicación de evaluación, como ciertos conjuntos de *curvas* en $\text{Gr}(r, V)$. Efectivamente, por construcción, tenemos las siguientes identidades conjuntistas:

$$\begin{aligned} X_1(D) &= \{K \in R \mid F(\pi^{-1}(K)) \cap D \neq \emptyset\}, \\ X_2(D) &= \{K \in R \mid F(\pi_Z^{-1}(K)) \cap D \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

En particular, se tienen los siguientes subconjuntos de los anteriores:

$$\begin{aligned} X_1^0(D) &= \{\varphi \in R^0 \mid \varphi(\mathbb{P}^1) \cap D \neq \emptyset\}, \\ X_2^0(D) &= \{\varphi \in R^0 \mid \varphi(x_0) \in D\}. \end{aligned}$$

Definimos finalmente, los siguientes ciclos en $A^\ell(R)$:

$$\begin{aligned} [X_1(D)] &\in A^{\ell-1}(R), \quad \text{codim}(D) = \ell; \\ [X_2(D)] &\in A^\ell(R), \quad \text{codim}(D) = \ell. \end{aligned}$$

De la representación geométrica natural de los cerrados irreducibles que los definen, diremos que vienen definidos por la condición

- “cortar al menos una vez a D ”, para los ciclos $[X_1(D)]$;
- “cortar a D al menos una vez determinada”, para los ciclos $[X_2(D)]$.

Potencias

En la construcción recién descrita, hemos terminado representando los cerrados contruidos, por simples condiciones geométricas. Hemos podido describir cada uno de ellos, como el conjunto de *curvas racionales* que, al menos una vez, pasa por D . Construiremos, ahora, cerrados generalizando esta descripción, condicionando el paso por D en al menos n ocasiones. Veamos un ejemplo previo para ilustrar esta pretensión.

Ejemplo. En principio tenemos varias opciones para generalizar la construcción anterior. Podríamos fijar dos subesquemas cerrados, D_1 y D_2 , en $\text{Gr}(r, V)$, ambos de la misma codimensión, c . Dados estos cerrados, podemos pensar en el conjunto de *curvas racionales* que pasan, al menos una vez, por ambos. Este conjunto correspondería, con las notaciones de la sección anterior, al cerrado intersección:

$$X_1(D_1) \cap X_1(D_2).$$

Análogamente, podríamos imponer la condición de corte en momentos determinados, construyendo, en este caso, el cerrado:

$$X_2(D_1) \cap X_2(D_2).$$

Una segunda opción es la siguiente. Dado un subesquema cerrado $D \subseteq \text{Gr}(r, V)$, de codimensión c , nos fijaremos ahora en el conjunto de *curvas racionales* que pasan al menos dos veces por D (análogamente, que cortan en al menos dos momentos determinados a D .) Este tipo de cerrados, si bien parten de una premisa más simple, al considerar sólo un cerrado D en $\text{Gr}(r, V)$, no tienen una descripción en R sencilla, pues, obviamente, no corresponden a la intersección $X_1(D) \cap X_1(D)$ (ó $X_2(D) \cap X_2(D)$.) Los siguientes cerrados en R se ajustan a esta última descripción geométrica.

Sea $Q_2 = Q \times_R Q = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times R$, el producto fibrado del R -esquema $Q := \mathbb{P}^1 \times R$, y denotemos por π_2 el morfismo natural

$$\pi_2 : Q_2 \longrightarrow R.$$

Consideremos el cerrado Z en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times R$ definido por:

$$Z := \{x_1\} \times \{x_2\} \times R,$$

para dos puntos distintos x_1, x_2 de \mathbb{P}^1 .

Consideremos, además, el producto fibrado sobre R , $\overline{\mathcal{Q}}_2 := \tilde{\mathcal{Q}} \times_R \tilde{\mathcal{Q}}$, y el morfismo natural

$$\pi'_1 : \overline{\mathcal{Q}}_2 \longrightarrow \mathcal{Q}_2.$$

El esquema $\overline{\mathcal{Q}}_2$ no es en general irreducible (ver comentario siguiente a la proposición (12 de 3.1.2)), pero podemos considerar la clausura del abierto:

$$\tilde{\mathcal{Q}}_0 := \{(q_1, q_2) \in \overline{\mathcal{Q}}_2 \mid q_1 \neq q_2\}.$$

Esta nos aporta una componente irreducible, dominante sobre R , que denotaremos $\tilde{\mathcal{Q}}_2$, con un morfismo:

$$\tilde{\mathcal{Q}}_2 \xrightarrow{F_2} \mathrm{Gr}(r, V) \times \mathrm{Gr}(r, V),$$

definido por:

$$F_2((q_1, q_2)) := (F(q_1), F(q_2)),$$

y que, por lo tanto, llamaremos *aplicación de evaluación* de $\tilde{\mathcal{Q}}_2$ en $\mathrm{Gr}(r, V) \times \mathrm{Gr}(r, V)$. Denotemos por π_1 la restricción de π'_1 a $\tilde{\mathcal{Q}}_2$,

$$\pi_1 : \tilde{\mathcal{Q}}_2 \longrightarrow \mathcal{Q}_2.$$

Sea $D \subset \mathrm{Gr}(r, V)$ un subesquema cerrado y $D_2 \subset \mathrm{Gr}(r, V) \times \mathrm{Gr}(r, V)$ el subesquema cerrado $D_2 := D \times D$.

Definimos en $\tilde{\mathcal{Q}}_2$ el cerrado:

$$\tilde{D}_2 := F_2^{-1}(D_2).$$

Consideraremos el subesquema cerrado imagen directa $\pi_1(\tilde{D}_2)$ en $\mathbb{P}^1 \times R$. Finalmente, fijadas las notaciones:

$$\begin{aligned} \pi &:= \pi_2 \circ \pi_1 : \tilde{\mathcal{Q}}_2 \longrightarrow R, \\ \pi_Z &:= \pi_2|_Z \circ \pi_1|_{\tilde{Z}} : \tilde{\mathcal{Q}}_2 \longrightarrow R, \quad \tilde{Z} := \pi_1^{-1}(Z), \end{aligned}$$

podemos definir en R los subesquemas:

$$\begin{aligned} X_1(D_2) &:= \pi(\tilde{D}_2), \\ X_2(D_2) &:= \pi_Z(\tilde{D}_2). \end{aligned}$$

Podemos representar geoméricamente estos cerrados, vía la composición de la primera proyección de $\mathrm{Gr}(r, V) \times \mathrm{Gr}(r, V)$ con la aplicación de evaluación

F_2 , como ciertos conjuntos de *curvas* en $\text{Gr}(r, V)$ que cortan a D en al menos dos puntos, bien arbitrarios ($X_1(D_2)$), bien determinados ($X_2(D_2)$).

Observación Los morfismos y los esquemas usados en la definición de estos cerrados, no están ahora en las condiciones del lema 7 de la sección §1.6 del Capítulo 1, de manera que no podemos asegurar la irreducibilidad de estos cerrados. Por tanto, no definiremos ciclos asociados a éstos, aunque sí usaremos el diagrama de su construcción, para, partiendo de un ciclo en un producto cartesiano de la Grassmanniana $\text{Gr}(r, n)$, definir directamente los ciclos en $A^*(R)$ que denominaremos potencias de los anteriores.

Sean Q_m el producto fibrado $Q \times_R \cdots \times_R Q = \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1 \times R$; y \tilde{Q}_m la componente irreducible del producto fibrado $\bar{Q}_m := \tilde{Q} \times_R \cdots \times_R \tilde{Q}$ que contiene al abierto

$$\tilde{Q}_0 := \{(q_1, \dots, q_m) \in \bar{Q}_m \mid q_i \neq q_j, \forall i \neq j\};$$

Sea F_m la aplicación de evaluación

$$F_m : \tilde{Q}_m \longrightarrow \text{Gr}(r, n)^m,$$

donde $\text{Gr}(r, n)^m$ indica el producto cartesiano $\text{Gr}(r, n) \times \cdots \times \text{Gr}(r, n)$. Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1 \times R \times \text{Gr}(r, n)^m & \xrightarrow{i} & \tilde{Q}_m \\ \downarrow p_1 & \searrow p_2 & \downarrow F_m \\ Z \subset \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1 \times R & & \text{Gr}(r, n)^m \\ \downarrow \pi & & \\ R & & \end{array}$$

En el mismo, i es la inmersión natural

$$\tilde{Q}_m \xrightarrow{i} \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1 \times R \times \text{Gr}(r, n)^m;$$

p_1 , p_2 y π las proyecciones naturales; el morfismo F_m verifica la igualdad $p_2 \circ i = F_m$. Se tiene además que F_m es de dimensión relativa $m + \dim(R)$. El subesquema Z es de la forma

$$Z := \{t_1\} \times \cdots \times \{t_m\} \times R,$$

para ciertos puntos distintos $t_i \in \mathbb{P}^1$.

Podemos así definir ciclos en $A^*(R)$ a partir de ciclos en $A^*(\text{Gr}(r, n)^m)$. Efectivamente, consideremos un ciclo

$$[D^{(m)}] := [D \times \cdots \times D] \in A^*(\text{Gr}(r, n)^m),$$

donde D denota una subvariedad de $\text{Gr}(r, V)$, la misma en todos los factores (ver discusión anterior.)

Con estas notaciones, y siendo ℓ la codimensión de D en $\text{Gr}(r, n)$, se definen los siguientes ciclos en $A^*(R)$:

$$\alpha_m := \pi_* \left[p_{1*} \left(p_2^* [D^{(m)}] \cdot i_* [\tilde{\mathcal{Q}}_m] \right) \right] \in A^{m(i-1)}(R), \quad (3.9)$$

$$\beta_m := \pi_* \left[p_{1*} \left(p_2^* [D^{(m)}] \cdot i_* [\tilde{\mathcal{Q}}_m] \right) \cdot j_* [Z] \right] \in A^{mi}(R). \quad (3.10)$$

Se tiene el siguiente

Lema 14 *Los ciclos $\alpha_m \in A^{m(i-1)}(R)$, $\beta_m \in A^{mi}(R)$ son divisibles por $m!$.*

Demostración: Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{Q}}_m \subset (\mathbb{P}^1)^m \times R \times \text{Gr}(r, n)^m & \xrightarrow{p_2} & \text{Gr}(r, n)^m \\ \downarrow p_1 & & \downarrow p \\ S^m \tilde{\mathcal{Q}} \subset S^m \mathbb{P}^1 \times R \times S^m \text{Gr}(r, n) & \xrightarrow{g} & S^m \text{Gr}(r, n) \\ \downarrow \pi & & \\ R & & \end{array}$$

donde S^m denota el producto simétrico. Además, el morfismo p es $m! : 1$.

Dado un ciclo $\alpha \in Z_*(\text{Gr}(r, n)^m)$ se tienen las igualdades

$$p_{1*} p_2^* \alpha = g^* p_* \alpha, \quad (3.11)$$

(ver Proposición 1.7 en [F]),

$$[\tilde{\mathcal{Q}}_m] = p_1^* [S^2 \tilde{\mathcal{Q}}]. \quad (3.12)$$

Así, dado un ciclo $\alpha \in Z_*(\text{Gr}(r, n)^m)$ se tiene

$$\begin{aligned} \pi_* p_{1*} (p_2^* \alpha \cdot [\tilde{\mathcal{Q}}_m]) &= \pi_* p_{1*} (p_2^* \alpha \cdot p_1^* [S^2 \tilde{\mathcal{Q}}]) && \text{por 3.12} \\ &= \pi_* (p_{1*} p_2^* \alpha \cdot [S^2 \tilde{\mathcal{Q}}]) && \text{fórmula de proyección} \\ &= \pi_* (g^* p_* \alpha \cdot [S^2 \tilde{\mathcal{Q}}]) && \text{por 3.11} \\ &= (m!) \pi_* (g^* \beta \cdot [S^2 \tilde{\mathcal{Q}}]), \end{aligned}$$

donde $(\beta = \frac{1}{m!}p_*\alpha) \in Z_*(S^m\text{Gr}(r, n))$, que está bien definido puesto que p es $m! : 1$. En particular, para cualquier ciclo $\alpha \in Z_*(\text{Gr}(r, n)^m)$, el ciclo

$$\pi_*p_{1*}(p_2^*\alpha \cdot [\tilde{Q}_m])$$

es divisible por $(m!)$ como queríamos demostrar. \square

Cada componente en el soporte de estos ciclos, se puede interpretar geoméricamente vía, de nuevo, la aplicación de evaluación y la primera proyección a $\text{Gr}(r, V)$. Podemos describir geoméricamente estos cerrados como conjuntos de *curvas racionales* en $\text{Gr}(r, V)$ que pasan, al menos, en m momentos distintos por el cerrado $D \subseteq \text{Gr}(r, V)$ original. Nos referiremos a ellos en los siguientes términos:

- “pasar al menos m veces por D ”, para los cerrados en el soporte de α_m ;
- “pasar al menos m veces, fijadas por Z , por D ”, para los cerrados en el soporte de β_m .

3.3 Cerrados básicos de dimensión baja

Nuestro interés final es el de dar una descripción geoméricamente explícita de bases en los grupos de Chow de cierto esquema que compactifica una variedad de morfismos de la recta proyectiva en una Grassmanniana de cocientes. La aplicación de evaluación natural nos permite identificar un morfismo dado con su imagen; hablamos así de *curva racional parametrizada*, con un claro abuso de lenguaje. Los ciclos de codimensión $k < d$ han sido descritos por condiciones geométricas impuestas por subvariedades de Schubert especiales de la Grassmanniana. Los ciclos duales de los anteriores, de dimensión $k < d$, serán los asociados a ciertas subvariedades de curvas racionales parametrizadas construidas en base a subvariedades lineales en la Grassmanniana, transversales a las subvariedades de Schubert especiales.

Pasamos así a la descripción explícita de lo que damos en llamar *familias geométricas* en el esquema R . Estas serán las imágenes de un morfismo de un k -esquema S , que denominaremos *esquema de parámetros*, en R . Para dar un tal morfismo, basta utilizar la propiedad universal de R (ver capítulo 1 §1.3), que ahora recordamos.

Sobre $\mathbb{P}^1 \times R$ se tiene un cociente universal:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times R}^n \longrightarrow \mathcal{E}_R.$$

Dar un morfismo

$$f : S \longrightarrow R$$

equivale a dar un cociente

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times S}^n \longrightarrow \mathcal{B},$$

de rango r y grado d en las fibras de S , esto es

$$\chi(\mathcal{B}_{|\mathbb{P}^1 \times \{s\}}(m)) = r(m+1) + d,$$

y tal que $\mathcal{B} = (1 \times f)^* \mathcal{E}_R$.

Daremos así una familia en R describiendo cocientes de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times S}^n$ bajo las condiciones de la propiedad universal de R . Veamos, paso a paso, la construcción básica en que utilizaremos para el caso más general posterior.

Construcción básica

1. Sea E_r un cociente libre de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^n$, de rango r y grado $d-1$ comprimido, esto es, si $d-1 = kr + m$, con $0 \leq m < r$, E_r es de la forma

$$E_r = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i) = \mathcal{O}(k+1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(k+1) \oplus \mathcal{O}(k) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(k).$$

Sea $F_{r+\ell}$ una extensión genérica de E_r por \mathcal{O}^ℓ de grado $d-1$ y de rango $r+\ell \leq n$, esto es una sucesión exacta de fibrados sobre \mathbb{P}^1 :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^\ell \rightarrow F_{r+\ell} \rightarrow E_r \rightarrow 0.$$

El fibrado $F_{r+\ell}$ se puede tomar de forma general:

$$F_{r+\ell} = \bigoplus_{i=1}^{r+\ell} \mathcal{O}(b_i),$$

con $0 \leq b_i$, de manera que está generado por sus secciones. Podemos por tanto fijar un epimorfismo

$$\rho : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^n \longrightarrow (F_{r+\ell}).$$

Tenemos pues la siguiente sucesión de epimorfismos:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^n \longrightarrow F_{r+\ell} \longrightarrow E_r.$$

2. El cociente libre de grado r y grado $d-1$, E_r , se corresponde con un morfismo

$$\varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow G(r, n).$$

Denotemos por C , su imagen en $G(r, n)$.

3. Denotemos por

$$\mathcal{O}_G^n \longrightarrow E_G$$

el cociente universal de $G(r, n)$ (cf capítulo 1 §1.1), y consideremos su restricción al subesquema C

$$\mathcal{O}_{G|C}^n \longrightarrow E_{G|C}.$$

De otra manera, consideremos para cada punto $\varphi(t) \in C$ ($t \in \mathbb{P}^1$), el correspondiente cociente $(E_r)_t$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^n$. Además se tiene de la sucesión de cocientes

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^n \longrightarrow F_{r+\ell} \longrightarrow E_r,$$

para cada $t \in \mathbb{P}^1$, una inclusión

$$\mathbb{P}((E_r)_t) \subset \mathbb{P}((F_{r+\ell})_t).$$

Geométricamente esta inclusión nos permite construir, para cada punto $\varphi(t) \in C$, una subvariedad lineal conteniéndolo que pasamos a describir.

4. Sea E_{r-1} un cociente general libre de rango $r-1$ de E_r . Este se puede dar fijando un cociente libre de rango $r-1$ del cociente universal restringido a C

$$\mathcal{O}_{G|C}^n \longrightarrow E_{G|C} \longrightarrow F_{r-1|C},$$

con grado suficientemente alto para que $(E_{G|C}^* \otimes F_{r-1|C})$ esté generado por secciones. Suponemos entonces fijada una sección $s_0 \in \Gamma(C, (E_{G|C}^* \otimes F_{r-1|C}))$.

De manera análoga podemos tomar un cociente F_ℓ de $F_{r+\ell}$, de grado suficientemente alto para que

$$F_{r+\ell}^* \otimes F_\ell$$

esté generado por sus secciones. Además se puede elegir de manera que $\mathbb{P}(E_r) \cap \mathbb{P}(F_\ell)$ se corten en sólo un número finito de puntos, y así $\mathbb{P}(E_{r-1})$ y $\mathbb{P}(F_\ell)$ sean disjuntos en $\mathbb{P}(F_{r+\ell})$. Suponemos entonces elegida una sección $s_1 \in \Gamma(C, (F_{r+\ell}^* \otimes F_\ell))$.

5. Dadas las elecciones anteriores, se tiene bien definida, para cada $t \in \mathbb{P}^1$ una subvariedad lineal $\Phi_\ell(t)$ de tipo α de dimensión ℓ

$$\Phi_\ell(t) := \{\mathbb{P}(F_r) \in \mathbb{P}(V) \mid \mathbb{P}(E_{r-1}|_t) \subset \mathbb{P}(F_r) \subseteq \mathbb{P}(F_{r+\ell}|_t)\}.$$

De igual manera, tenemos una subvariedad lineal de tipo α de dimensión $\ell - 1$, $\Phi_{\ell-1}(t)$, para cada $t \in \mathbb{P}^1$,

$$\Phi_{\ell-1}(t) := \{\mathbb{P}(F_r) \in \mathbb{P}(V) \mid \mathbb{P}(E_{r-1|t}) \subset \mathbb{P}(F_r) \subseteq \mathbb{P}(F_{\ell|t} + E_{r-1|r})\}.$$

Es directo de la construcción que para cada $t \in \mathbb{P}^1$ se tiene la inclusión $\Phi_{\ell-1}(t) \subset \Phi_{\ell}(t)$.

6. Para cada $Q \in \Phi_{\ell-1}(t)$ consideremos la recta

$$L_Q(t) := Q + \varphi(t) \subseteq \Phi_{\ell}(t),$$

que está bien definida por la elección general de F_{ℓ} . Tenemos, en definitiva, descrita para cada $t \in \mathbb{P}^1$, una familia lineal $(\ell - 1)$ -dimensional, de rectas pasando por $\varphi(t)$, todas incluidas en $\Phi_{\ell}(t)$.

7. Resumiendo los puntos anteriores, si denotamos por S el subesquema en $\mathbb{P}^1 \times \text{Gr}(r, V)$ descrito como

$$S := \{(t, Q) \mid Q \in \Phi_{\ell-1}(t)\},$$

para cada $s = (t, Q) \in S$ tenemos descrita una recta

$$L_s := \varphi(t) + Q.$$

Además, para dos puntos distintos $s, s' \in S$, las correspondientes rectas L_s y $L_{s'}$ son distintas. La familia de rectas, L_S , así formada tiene dimensión

$$\dim(L_S) = \dim(S) = 1 + \dim(\Phi_{\ell-1}) = \ell.$$

8. Sea $E := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times S}^n$ y tomemos su proyectivo de cocientes de rango r :

$$G(r, E) \simeq \mathbb{P}^1 \times S \times G(r, n).$$

Consideremos las siguientes proyecciones naturales:

$$\begin{array}{ccccc} G(r, E) & & & & \\ \pi_1 \downarrow & \pi_2 \searrow & & & \\ \mathbb{P}^1 \times S & S \times G(r, n) & & & \\ p_1 \downarrow & p_2 \downarrow & p_3 \searrow & & \\ \mathbb{P}^1 & S & G(r, n). & & \end{array}$$

9. Denotemos por

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times S}^n \xrightarrow{\rho_1} F_\varphi \quad (3.13)$$

el cociente libre de rango r y grado $d - 1$ que resulta de levantar a $\mathbb{P}^1 \times S$ por p_1 , el cociente de la curva C_{d-1} dado en el punto 2.

10. Levantemos a $S \times G(r, n)$ por p_3 la epiyección universal de $G(r, n)$

$$\mathcal{O}_{S \times G}^n \longrightarrow p_3^* E_G,$$

y consideremos en $S \times G(r, n)$ el subesquema

$$Z := \{(s, P) \mid P \in L_s\}.$$

La inclusión $Z \subseteq S \times G(r, n)$ nos aporta una epiyección natural

$$p_3^* E_G \longrightarrow p_3^* E_{G|Z},$$

y, componiendo, un cociente

$$\mathcal{O}_{S \times G}^n \longrightarrow p_3^* E_{G|Z}.$$

La operación $\pi_{1*}\pi_2^*$ lleva este último a un cociente sobre $\mathbb{P}^1 \times S$ del haz trivial, que denotaremos

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times S}^n \xrightarrow{\rho_2} T_Z, \quad (3.14)$$

$$T_Z := \pi_{1*}\pi_{2*}p_3^* E_{G|Z}.$$

11. Consideremos el morfismo suma $\rho := \rho_1 + \rho_2$:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times S}^n \xrightarrow{\rho} F_\varphi \oplus T_Z. \quad (3.15)$$

12. Es fácil ver que el morfismo ρ es sobreyectivo en las fibras de la proyección de $\mathbb{P}^1 \times S$ a S , de manera que (3.15) es un cociente de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times S}^n$. Efectivamente, en un punto $(t, s) \notin \text{sop}(T_Z)$, el morfismo ρ coincide con el epimorfismo ρ_1 . En los puntos $(t, s) \in \text{sop}(T_Z)$, el morfismo de fibras es el dual de la inmersión $(t, s, L_s) \hookrightarrow \mathbb{P}^1 \times S \times G(r, n)$, esto es:

$$(t, s, L_s) = G(r, F_\varphi \oplus T_{Z|(t,s)}) \hookrightarrow G(r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times S|(t,s)}^n) = \{t\} \times \{s\} \times G(r, n).$$

Así tenemos sobre $\mathbb{P}^1 \times S$ el cociente (3.15). Por otra parte, es claro de la construcción que las fibras sobre S del haz cociente son todas de rango r y grado total $(d - 1) + 1 = d$, esto es, $K := F_\varphi \oplus T_Z$ tiene polinomio de Hilbert sobre S :

$$\chi(K_S(m)) = r(m + 1) + d,$$

de manera que K es plano sobre S .

13. En definitiva hemos construido una sucesión exacta sobre $\mathbb{P}^1 \times S$ que verifica las condiciones de la propiedad universal de R . Tenemos, por tanto, un morfismo:

$$H : S \longrightarrow R$$

bien definido, y dada la dimensión de S , esto da una familia de dimensión $\ell - 1$ en R que denotaremos en forma monomial como $B_{\ell-1}$.

Construcciones generales

Construimos seguidamente familias generales. Para ello, bastará ampliar el espacio de parámetros S descrito anteriormente, que nos permitía describir la familia como imagen de un morfismo $H : S \rightarrow R$. Daremos la construcción de una tal familia por pasos.

1. Sea $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^n \rightarrow E_\varphi$ el cociente libre de rango r y grado $d - (v + f) > 0$, para ciertos enteros positivos v y f , comprimido (ver puntos (1) y (2) en el ejemplo anterior) correspondiente a un morfismo

$$\varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow G(r, n).$$

Denotemos por C , su imagen en $G(r, n)$.

2. Fijemos

$$t_i^1, t_i^2, \dots, t_i^{c_i}, \quad i = 1, \dots, n - r - 1,$$

un total de f puntos distintos de \mathbb{P}^1 , y sea

$$S := \left(\prod_{i=0}^{n-r-1} (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^i)^{b_{i+1}} \right) \times \left(\prod_{i=1}^{n-r-1} (\{t_i^-\} \times \mathbb{P}^i)^{c_i} \right),$$

donde los exponentes denotan el número de factores en el producto cartesiano múltiple de la base, esto es:

$$(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^i)^{b_{i+1}} := (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^i) \times \dots \times (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^i),$$

y

$$(\{t_i^-\} \times \mathbb{P}^i)^{c_i} := (\{t_i^1\} \times \mathbb{P}^i) \times \dots \times (\{t_i^{c_i}\} \times \mathbb{P}^i).$$

Sea p la proyección de S al producto de factores en lugar impar:

$$p : S \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1 \\ \times \{t_1^1\} \times \dots \times \{t_1^{c_1}\} \times \dots \times \{t_{n-r-1}^1\} \times \dots \times \{t_{n-r-1}^{c_{n-r-1}}\}.$$

Nos restringiremos en nuestra construcción al abierto de este producto de factores impares, formado por puntos P cuyas entradas son distintas dos a dos. Si denotamos tal abierto por U_0 , nuestra construcción toma como espacio de parámetros

$$S_0 := p^{-1}(U_0).$$

3. Supongamos además que los enteros b_{i+1} y c_j anteriores se han elegido de manera que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-r-1} b_{i+1} &= v \\ \sum_{j=1}^{n-r-1} c_j &= f, \end{aligned}$$

donde v y f son como en el punto (1).

4. Sea P un punto en U_0 que denotaremos

$$P = (w_0, w_1, \dots, w_{n-r-1}, t_1, t_2, \dots, t_{n-r-1})$$

con

$$\begin{aligned} w_i &= (w_i^1, \dots, w_i^{b_{i+1}}), \quad i = 0, 1, \dots, n-r-1; \\ t_j &= (t_j^1, \dots, t_j^{c_j}), \quad j = 1, \dots, n-r-1; \end{aligned}$$

y consideremos en C los $v + f$ puntos imágenes por φ de éstos. De otra forma, nos referiremos a estos $v + f$ puntos como $\varphi(P)$.

5. Tenemos, por tanto, distinguidos en C un total de $v + f$ puntos

$$\begin{aligned} \{P_0^1, \dots, P_0^{b_1}\} \cup \dots \cup \{P_{n-r-1}^1, \dots, P_{n-r-1}^{b_{n-r}}\} \\ \cup \{Q_1^1, \dots, Q_1^{c_1}\} \cup \dots \cup \{Q_{n-r-1}^1, \dots, Q_{n-r-1}^{c_{n-r-1}}\} \subset C. \end{aligned}$$

6. Para cada subconjunto

$$\{P_i^1, \dots, P_i^{b_{i+1}}\}, \quad i = 0, \dots, n-r-1,$$

en esta última unión, describimos una familia i -dimensional de rectas sobre cada punto, fijando, para todos los puntos del mismo subconjunto, los mismos cocientes F_{r+i} , G_i (ver notación en el ejemplo anterior.)

Realizamos la misma construcción para cada subconjunto

$$\{Q_j^1, \dots, Q_j^{c_j}\}, \quad j = 1, \dots, n-r-1,$$

eligiendo F_{r+j} y G_j distintos a los anteriores del mismo rango.

7. La construcción anterior describe, dados $(v + f)$ puntos en C , sub-variedades lineales de tipo α en $G(r, n)$

$$\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{n-r-1}, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-r-1},$$

con dimensiones indicadas por su subíndice. Fijemos isomorfismos

$$\phi^i : \mathbb{P}^i \xrightarrow{\sim} \Phi_i, \quad i = 0, \dots, n - r - 1,$$

con los correspondientes \mathbb{P}^i del primer factor de S , y

$$\psi^j : \mathbb{P}^j \xrightarrow{\sim} \Psi_j, \quad j = 1, \dots, n - r - 1,$$

para los del segundo factor. Con estas identificaciones, consideremos como espacio de parámetros

$$T_0 := S'_0 \cap \left[\left(\prod_{i=0}^{n-r-1} (\mathbb{P}^1 \times \phi^i(\mathbb{P}^i))^{b_{i+1}} \right) \times \left(\prod_{i=1}^{n-r-1} (\{t_i^-\} \times \psi^i(\mathbb{P}^i))^{c_i} \right) \right],$$

de otra manera

$$T_0 := S'_0 \cap \left[\left(\prod_{i=0}^{n-r-1} (\mathbb{P}^1 \times \Phi^i)^{b_{i+1}} \right) \times \left(\prod_{i=1}^{n-r-1} (\{t_i^-\} \times \Psi^i)^{c_i} \right) \right],$$

donde S'_0 es el abierto isomorfo a S_0 obvio por este cambio de notación.

8. Con la notación del punto (9) del ejemplo previo, tendremos así descrita, para cada punto $s \in S_0$ una familia en R de cocientes de la forma

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^n \longrightarrow F_\varphi \oplus T_Z,$$

con F_φ libre de rango r y grado $d - (v + f)$, y T_Z de torsión con soporte

$$\text{sop}(T_Z) = \varphi(P),$$

y fibras sobre cada punto en su soporte, de rango 1 correspondientes a la inmersión de la correspondiente recta en $G(r, n)$.

9. La construcción nos describe así una familia en R cuyo punto general determina en $G(r, n)$, vía la aplicación de evaluación, una curva fija C de grado $d - (v + f)$ y en $(v + f)$ de sus puntos, sendas rectas. La familia tiene dimensión

$$\begin{aligned} \dim(S) &= \sum_{i=0}^{n-r-1} (i+1)b_{i+1} + \sum_{j=1}^{n-r-1} jc_j \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n-r-1} i(b_i + c_i) \right) + (n-r)b_{n-r}, \end{aligned}$$

y la denotaremos en forma monomial

$$B_1^{b_1} \dots B_{n-r}^{b_{n-r}} C_1^{c_1} \dots C_{n-r-1}^{c_{n-r-1}}.$$

3.4 Bases en $A^*(R)$

Por los lemas (9) y (10) del capítulo (2), sabemos que el rango de un grupo $A^k(R)$, y por dualidad de $A^{\dim(R)-k}(R)$, para $0 \leq k \leq d$ es

$$r_k := \text{rango}(A^k(R)) = h_1^{-1}(k), \quad (3.16)$$

donde h_1 es una función en $2(n-r-1)+1$ variables, digamos $y_1, \dots, y_{n-r-1}, y_{n-r}, t_1, \dots, t_{n-r-1}$, con expresión

$$h_1 = \left(\sum_{i=1}^{n-r-1} i(y_i + t_i) \right) + (n-r) \cdot y_{n-r}. \quad (3.17)$$

La expresión de h_1 indica así el grado de un monomio mónico en $2(n-r-1)+1$ variables, $Y_1, \dots, Y_{n-r-1}, Y_{n-r}, T_1, \dots, T_{n-r-1}$ con grado el indicado por su subíndice.

Efectivamente, dado un monomio mónico en estas variables:

$$M = Y_{n-r}^{y_{n-r}} \dots Y_1^{y_1} \dots T_{n-r-1}^{t_{n-r-1}} \dots T_1^{t_1},$$

éste tiene grado total:

$$\text{grado}(M) = \left(\sum_{i=1}^{n-r-1} i(y_i + t_i) \right) + (n-r)y_{n-r}.$$

Denotemos por σ^j una subvariedad de Schubert especial de codimensión j en $\text{Gr}(r, n)$. Usando las notaciones de la sección (3.2) definimos en R los ciclos asociados a las subvariedades irreducibles $X_1(\sigma^i)$, $X_2(\sigma^i)$ de codimensiones $i-1$ e i respectivamente:

$$\begin{aligned} T_i &:= [X_1(\sigma^{i+1})] \in A^i(R), \quad i = 1, \dots, n-r-1, \\ Y_j &:= [X_2(\sigma^j)] \in A^j(R), \quad j = 1, \dots, n-r, \end{aligned} \quad (3.18)$$

y nos referiremos a ellos como los *ladrillos* en nuestra construcción.

Podemos definir también los ciclos que denominaremos *potencias* de estos ladrillos. Con la notación del apartado *Potencias* de la sección (3.2), sea

$\sigma \subset \text{Gr}(r, n)$ una subvariedad de Schubert especial de codimensión i , $i = 1, \dots, n - r$, y denotemos por

$$\Sigma^{(m)} := \sigma \times \dots \times \sigma \subset \text{Gr}(r, n)^m.$$

Sea $[\Sigma^{(m)}] \in A^{mi}(\text{Gr}(r, n)^m)$ el ciclo asociado.

Definimos los ciclos:

$$\alpha_m := \pi_* \left[p_{1*} \left(p_2^*[\Sigma^{(m)}] \cdot i_*[\tilde{\mathcal{Q}}_m] \right) \right] \in A^{m(i-1)}(R) \quad (3.19)$$

$$\beta_m := \pi_* \left[p_{1*} \left(p_2^*[\Sigma^{(m)}] \cdot i_*[\tilde{\mathcal{Q}}_m] \right) \cdot j_*[Z] \right] \in A^{mi}(R). \quad (3.20)$$

Además, por el lema (14) sabemos que éstos son divisibles por $m!$, de manera que definimos, finalmente, nuestros ciclos potencia como

$$\begin{aligned} T_{i-1}^{(m)} &:= \frac{1}{m!} \alpha_m \in A^{m(i-1)}(R), & i = 2, \dots, n - r; \\ Y_i^{(m)} &:= \frac{1}{m!} \beta_m \in A^{mi}(R), & i = 1, \dots, n - r. \end{aligned}$$

Finalmente, definimos *monomios*:

$$\alpha = Y_{n-r}^{(y_{n-r})} \cdot \dots \cdot Y_1^{(y_1)} \cdot T_{n-r-1}^{(t_{n-r-1})} \cdot \dots \cdot T_1^{(t_1)} \in A^k(R), \quad (3.21)$$

como el ciclo intersección en el grupo $A^k(R)$ con

$$k = \left(\sum_{i=1}^{n-r-1} i(y_i + t_i) \right) + (n - r)y_{n-r}.$$

Tenemos así, para cada $k < d$, descritos en $A^k(R)$ un total de $r_k := \text{rango}(A^k(R))$ ciclos distintos, α_j . Mostraremos que éstos constituyen una base en $A^k(R)$, para cada $k < d$, presentando r_k ciclos distintos, a_j , en $A^{\dim(R)-k}(R)$, tales que la matriz de intersección es de determinante 1. De hecho, dado un orden en ambos conjuntos de ciclos, ésta será una matriz triangular superior con unos en la diagonal.

Se consideran así los ciclos de dimensión $k < d$ asociados a familias en R de la forma

$$a := B_{n-r}^{b_{n-r}} \cdot \dots \cdot B_1^{b_1} C_{n-r-1}^{c_{n-r-1}} \cdot \dots \cdot C_1^{c_1}, \quad (3.22)$$

con las notaciones de la sección (3.3). Denotaremos un tal ciclo por \mathbf{a} . Una tal familia se construye a partir de una curva fija irreducible $C \subset G(r, n)$, de grado $d - m > 0$ con

$$m = \left(\sum_{i=1}^{n-r-1} (b_i + c_i) \right) + b_{n-r},$$

y tiene dimensión

$$\dim(\mathbf{a}) = \left(\sum_{i=1}^{n-r-1} i(b_i + c_i) \right) + (n-r)b_{n-r},$$

de manera que de nuevo tenemos, para cada $k < d$, descritos en $A^{\dim(R)-k}(R)$ un total de r_k ciclos distintos.

Tenemos así, para cada $k < d$, dos conjuntos

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(k) &:= \{\alpha_j \in A^k(R) \mid \alpha_j \text{ como en 3.21}\}, \\ \mathbb{B}(k)^\vee &:= \{\mathbf{a}_j \in A^{\dim(R)-k}(R) \mid \mathbf{a}_j \text{ como en 3.22}\}, \end{aligned}$$

ambos de cardinal r_k .

Dado un ciclo $\alpha \in \mathbb{B}(k)$, denotaremos por $p(\alpha)$ a la suma

$$p(\alpha) := \sum_{i=1}^{n-r} y_i.$$

Análogamente, para $\mathbf{a} \in \mathbb{B}(k)^\vee$, $p(\mathbf{a})$ se define como

$$p(\mathbf{a}) := \sum_{i=1}^{n-r} b_i.$$

Dados dos ciclos $\alpha, \alpha' \in A^k(R)$, definimos el siguiente orden:

1. si $p(\alpha) \geq p(\alpha')$, entonces $\alpha \leq \alpha'$;
2. si $p(\alpha) = p(\alpha')$, tomaremos el orden lexicográfico inducido por el orden en los monomios:

$$Y_{n-r} \leq_{\text{lex}} \dots \leq_{\text{lex}} Y_1 \leq_{\text{lex}} T_{n-r-1} \leq_{\text{lex}} \dots \leq_{\text{lex}} T_1.$$

Así, por ejemplo, en el conjunto $\mathbb{B}(3)$ daremos sus elementos ordenados, de menor a mayor:

$$Y_1^3 < Y_2 Y_1 < Y_1^2 T_1 < Y_3 < Y_2 T_1 < T_2 Y_1 < Y_1 T_1^2 < T_3 < T_2 T_1 < T_1^3.$$

Este orden se traduce, elemento a elemento, de un $\mathbb{B}(k)$ en el $\mathbb{B}^\vee(k)$ correspondiente. De esta manera, con ambos conjuntos ordenados de menor a mayor, definimos la matriz k -ésima de intersección, M_k , como

$$M_k := (m_{ij}), \quad \text{donde } m_{ij} := \mathbf{a}_i \cdot \alpha_j. \quad (3.23)$$

El objetivo de ordenar las bases así es el de conseguir matrices triangulares superiores, es decir, matrices M_k con $m_{ij} = 0$ siempre que $i > j$. Desarrollamos seguidamente un *argumento de intersección* que nos permitirá calcular estos números de intersección aplicando la fórmula de proyección.

3.4.1 Argumento de intersección

Sea $k < d$ la siguiente suma de números enteros no negativos:

$$k = \left(\sum_{i=1}^{n-r-1} i(y_i + t_i) \right) + (n-r)y_{n-r}$$

y denotemos por

$$\begin{aligned} v &:= \sum_{i=1}^{n-r} y_i, \\ f &:= \sum_{i=1}^{n-r-1} t_i. \end{aligned}$$

Consideremos de nuevo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 \times \overset{v+f}{\cdots} \times \mathbb{P}^1 \times R \times \mathrm{Gr}(r, n)^{v+f} & \xrightarrow{i} & \tilde{\mathcal{Q}}_{v+f} \\ \downarrow p_1 & \searrow p_2 & \downarrow F_{v+f} \\ Z \subset \overset{j}{\mathbb{P}^1} \times \overset{v+f}{\cdots} \times \mathbb{P}^1 \times R & & \mathrm{Gr}(r, n)^{v+f} \\ \downarrow \pi & & \\ R & & \end{array}$$

Sea $\alpha \in A^k(R)$ de la forma

$$\alpha := Y_{n-r}^{(y_{n-r})} \cdots Y_1^{(y_1)} \cdot T_{n-r-1}^{(t_{n-r-1})} \cdots T_1^{(t_1)}$$

definido a partir del diagrama anterior. Es decir, sea

$$Z := \{t_1\} \times \cdots \times \{t_v\} \times \mathbb{P}^1 \times \overset{f}{\cdots} \times \mathbb{P}^1 \times R,$$

con $p(\alpha)$ puntos distintos $t_i \in \mathbb{P}^1$, y α definido como intersección de ciclos, cada uno construido con el diagrama correspondiente.

Sea $\mathbf{a} \in A^{\dim(R)-k}(R)$ ciclo de la forma

$$\mathbf{a} := [B_{n-r}^{b_{n-r}} \cdots B_1^{b_1} C_{n-r-1}^{c_{n-r-1}} \cdots C_1^{c_1}]$$

El 0-ciclo intersección $\alpha \cdot \mathbf{a}$ queda unívocamente determinado por su número de intersección, pues $A^0(R) \simeq \mathbb{Z}$. Veamos cómo éste coincide con el número de intersección de ciertos ciclos en $\mathrm{Gr}(r, n)^{v+f}$.

Efectivamente, sea $[D] \in A^*(\text{Gr}(r, n)^{v+f})$ el ciclo que define a α , esto es

$$\alpha := \frac{1}{K} \pi_* \left[p_{1*} \left(p_2^*[D] \cdot i_*[\tilde{\mathcal{Q}}_{v+f}] \right) \cdot j_*[Z] \right],$$

donde $K = \prod_{i=1}^{n-r} y_i!$.

Entonces para el producto $\alpha \cdot a$ se tiene, por la fórmula de proyección para el morfismo π

$$\alpha \cdot a = \frac{1}{K} \pi_* \left[p_{1*} \left(p_2^*[D] \cdot i_*[\tilde{\mathcal{Q}}_{v+f}] \right) \cdot j_*[Z] \cdot \pi^*a \right]. \quad (3.24)$$

El ciclo intersección en el anillo del esquema intermedio $\mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1 \times R$, que aparece representado es de nuevo un 0-ciclo, de manera que puesto que estamos interesados por el número de intersección, seguiremos nuestro cálculo con

$$\frac{1}{K} \left[p_{1*} \left(p_2^*[D] \cdot i_*[\tilde{\mathcal{Q}}_{v+f}] \right) \cdot j_*[Z] \cdot \pi^*a \right]. \quad (3.25)$$

En esta expresión, el ciclo intersección $j_*[Z] \cdot \pi^*a$ requiere algún comentario. En primer lugar, la definición del ciclo a es por medio de una familia

$$B_{n-r}^{b_{n-r}} \dots B_1^{b_1} C_{n-r-1}^{c_{n-r-1}} \dots C_1^{c_1},$$

construida (3.3) con un cociente libre de cierto grado, y ciertos haces de torsión de rango 1 soportados en dos tipos distintos de puntos de \mathbb{P}^1 : unos fijos, y otros arbitrarios. Es entonces claro que, por la definición de Z , debe haber un número de puntos arbitrarios en la definición de la familia que sea al menos v . Pero esto se puede leer como la siguiente relación numérica en el *multiexponente* de la familia:

$$v' := \sum_{i=1}^{n-r} b_i \geq v := \sum_{i=1}^{n-r} y_i. \quad (3.26)$$

En caso contrario la intersección es nula. Supongamos, entonces, que se verifica la relación (3.26). En tal caso, el número distinto de elecciones (órdenes) en que se pueden *acoplar* estos puntos arbitrarios con los fijados en Z se reflejará en un factor K'

$$K' = \binom{v'}{v} \cdot v!.$$

Se tiene así, que la intersección anterior, siempre que no sea nula, nos produce un ciclo $(k+f)$ -dimensional, que representaremos por a_Z , y así (3.25) queda

$$K'' \left[p_{1*} \left(p_2^*[D] \cdot i_*[\tilde{\mathcal{Q}}_{v+f}] \right) \cdot a_Z \right], \quad (3.27)$$

donde el coeficiente K'' es $\frac{K'}{K}$. Podemos de nuevo aplicar la fórmula de proyección para la proyección p_1 , quedando (3.27) en la forma

$$K'' p_{1*} \left[p_2^*[D] \cdot i_*[\tilde{Q}_{v+f}] \cdot p_1^* a_Z \right]. \quad (3.28)$$

Es directo, de las definición de α , que el ciclo que aparece dentro de la expresión es de nuevo un 0-ciclo, y así basta calcular

$$K'' p_2^*[D] \cdot i_*[\tilde{Q}_{v+f}] \cdot p_1^* a_Z, \quad (3.29)$$

y, en definitiva, aplicando una última vez la fórmula de proyección para p_2 :

$$K'' p_2^* \left[[D] \cdot p_{2*} \left(i_*[\tilde{Q}_{v+f}] \cdot p_1^* a_Z \right) \right] \quad (3.30)$$

o, por ser su interior un 0-ciclo, expresada como producto de ciclos en $A^*(\text{Gr}(r, n)^{v+f})$

$$K'' \left[[D] \cdot p_{2*} \left(i_*[\tilde{Q}_{v+f}] \cdot p_1^* a_Z \right) \right], \quad (3.31)$$

como queríamos en un principio.

3.4.2 Matrices de intersección

Es fácil mostrar, ahora, la forma general de una matriz de intersección. Bastará para ello calcular los productos de intersección de la diagonal principal y de las entradas por debajo de la misma. Para cada uno de estos casos el argumento de intersección anterior nos permitirá aplicar la fórmula (3.31), y será suficiente identificar geoméricamente los ciclos implicados.

En primer lugar, sea $p_0 := \max\{p(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{B}(k)\}$, y consideremos la partición disjunta

$$\mathbb{B}(k) = \prod_{p=0}^{p_0} F_p,$$

donde $F_p := \{\alpha \in \mathbb{B}(k) \mid p(\alpha) = p\}$. Con las notaciones obvias, podemos definir una partición disjunta

$$\mathbb{B}(k)^\vee = \prod_{p=0}^{p_0} F_p^\vee,$$

y claramente, $|F_p| = |F_p^\vee|$, $p = 0, \dots, p_0$.

Distingamos ahora, en la matriz M_k , las submatrices $M(F_p)$ formadas por los números de intersección entre los elementos de los F_p y F_p^\vee , $p = 0, \dots, p_0$.

Estas submatrices nos permiten considerar la matriz M_k por cajas, siendo las $M(F_p)$, las cajas en la diagonal.

Con esta visión de M_k por cajas, siempre considerando en $\mathbb{B}(k)$ y $\mathbb{B}(k)^\vee$ el orden de menor a mayor ya descrito, podemos asegurar que:

Lema 15 *La matriz M_k tiene la siguiente estructura por cajas:*

$$\begin{pmatrix} \boxed{M(F_{p_0})} & * & * & * \\ \mathbf{0} & \boxed{M(F_{p_0-1})} & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{M(F_0)} \end{pmatrix}$$

En particular, si este resultado es cierto, el determinante de M_k es el producto de los determinantes de las submatrices de la diagonal $M(F_p)$, $p = 0, \dots, p_0$.

Demostración: Los elementos de la matriz que estamos afirmando que son nulos, son de la forma

$$\mathbf{a} \cdot \alpha,$$

con $\mathbf{a} \in F_p^\vee$ y $\alpha \in F_q$ tales que $p < q$, donde

$$p = \sum_{i=1}^{n-r} b_i, \quad q = \sum_{i=1}^{n-r} y_i;$$

de manera que no se verifica la relación (3.26) que nos aparecía de manera natural en el argumento de intersección. \square

Por otra parte, veremos que estas submatrices en la diagonal, son también triangulares superiores. Además, los elementos en sus diagonales son todos 1, de manera que el determinante de la matriz M_k es 1. Esto demuestra que $\mathbb{B}(k)$ y $\mathbb{B}^\vee(k)$ son \mathbb{Z} -bases duales para los correspondientes grupos $A^k(R)$ $A^{\dim(R)-k}(R)$. Verifiquemos, finalmente, la afirmación sobre las submatrices diagonales.

Dado un ciclo $\alpha = Y_{n-r}^{(y_{n-r})} \cdot \dots \cdot Y_1^{(y_1)} \cdot T_{n-r-1}^{(t_{n-r-1})} \cdot \dots \cdot T_1^{(t_1)}$, denotaremos por (α) su *multiexponente*:

$$(\alpha) := (y_{n-r}, \dots, y_1, t_{n-r-1}, \dots, t_1),$$

y nos interesará en algunas ocasiones escribirlo en la forma:

$$(\alpha) := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n-2r+1}).$$

De manera análoga (\mathbf{a}) indicará el multiexponente de un ciclo

$$\mathbf{a} := [B_{n-r}^{b_{n-r}} \cdots B_1^{b_1} C_{n-r-1}^{c_{n-r-1}} \cdots C_1^{c_1}].$$

Con estas notaciones, basta verificar las siguientes afirmaciones:

1. $C_i^m \cdot T_i^{(m)} = 1, \quad i = 1, \dots, n-r-1;$
2. $B_i^m \cdot Y_i^{(m)} = 1, \quad i = 1, \dots, n-r;$
3. si $h(\alpha) = h(\mathbf{a}), p(\alpha) = p(\mathbf{a})$ y

$$\begin{aligned} (\alpha) &= (v_1, v_2, \dots, v_{2n-2r+1}), \\ (\mathbf{a}) &= (w_1, w_2, \dots, w_{2n-2r+1}), \end{aligned}$$

son tales que existe un índice j_0 , con $v_i = w_i$ para todo $i = 1, \dots, j_0-1$, y $v_{j_0} > w_{j_0}$, entonces $\mathbf{a} \cdot \alpha = 0$;

4. si $(\alpha) = (\mathbf{a})$ entonces $\mathbf{a} \cdot \alpha = 1$.

Terminamos demostrando estos resultados:

Lema 16 Sean

$$\begin{aligned} \alpha &:= Y_i^{(m)} \in A^{mi}(R), \\ \mathbf{a} &:= B_i^m \in A^{\dim(R)-mi}(R), \quad i = 1, \dots, n-r; \\ \beta &:= T_i^{(m)} \in A^{mi}(R), \\ \mathbf{b} &:= C_i^m \in A^{\dim(R)-mi}(R), \quad i = 1, \dots, n-r-1. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \boxed{\mathbf{a} \cdot \alpha = 1} \\ \boxed{\mathbf{b} \cdot \beta = 1} \end{aligned}$$

Demostración: Basta en ambos casos identificar los ciclos

$$p_{2*} \left(i_*[\tilde{\mathcal{Q}}_m] \cdot p_1^* \mathbf{a}_Z \right), \quad p_{2*} \left(i_*[\tilde{\mathcal{Q}}_m] \cdot p_1^* \mathbf{b}_Z \right), \quad (3.32)$$

así como la constante K'' descritos por el argumento de intersección. Consideremos primero el caso de $\mathbf{a} \cdot \alpha$. El ciclo α queda determinado por fijar un ciclo en $\text{Gr}(r, n)^m$ de la forma

$$[D] := [\sigma^i \times \cdots \times \sigma^i],$$

para cierta subvariedad de Schubert especial σ^i de codimensión i fijada. En la definición de éste, el subesquema Z es de la forma

$$Z := \{t_1\} \times \cdots \times \{t_m\} \times R,$$

y así

$$\alpha := \frac{1}{m!} \pi_* \left[p_{1*} \left(p_2^*[D] \cdot i_*[\tilde{\mathcal{Q}}_m] \right) \cdot j_*[Z] \right].$$

Por otra parte, el ciclo α está asociado a una familia construida como imagen de un morfismo a R de un espacio S de parámetros de la forma

$$T_0 := (\mathbb{P}^1 \times \Phi^{i-1})^m.$$

Así, en la curva fija correspondiente al cociente libre de la familia, quedan m puntos arbitrarios. La clausura de esta familia define el ciclo α , y en ella aparecen puntos en los que los puntos arbitrarios son distintos, pero también en los que éstos han coincidido. Las componentes con puntos coincidentes tienen así un número menor de arbitrariedades, y así éstas no cortan al subesquema Z , esto es no aportan soporte al ciclo intersección α_Z . Este queda así definido al acoplar m -uplas de puntos distintos a los valores t_1, \dots, t_m , y por tanto

$$K' = m! \quad (\text{cf } \S 3.4.1) \Rightarrow K'' = 1.$$

Queda por tanto determinar qué tipos de subvariedades en $\text{Gr}(r, n)^m$ están en el soporte del ciclo

$$\alpha_G := p_{2*} \left(i_*[\tilde{\mathcal{Q}}_m] \cdot p_1^* \alpha_Z \right).$$

Ahora bien, cada punto de la familia de α , en la que hemos forzado a que los m puntos arbitrarios ahora sean fijos, distingue, vía la aplicación de evaluación, en $\text{Gr}(r, n)$:

- bien un punto en la curva fija C de grado $d - m$, determinada como imagen de un morfismo φ de grado $d - m$ de \mathbb{P}^1 en $\text{Gr}(r, n)$;
- bien un punto en la subvariedad lineal Φ^i de dimensión i que contiene a uno de los m puntos distintos $\varphi(t_1), \dots, \varphi(t_m)$.

Así, las subvariedades en el soporte del ciclo α_G se forman como m -uplas de los siguientes tipos:

1. los m puntos sobre la curva C ;
2. algunos sobre la curva, y el resto en las distintas subvariedades lineales Φ^i ;

3. varios en la subvariedad lineal que pasa por un mismo punto $\varphi(t_j)$;
4. uno en cada subvariedad lineal Φ^i .

La única manera de verificar en cada factor la intersección con la subvariedad de Schubert especial σ^i es con el tipo 4. De éstas, sólo cumplen completamente la condición las ordenadas en la forma

$$\Phi_1^1 \times \cdots \times \Phi_m^i,$$

donde el subíndice indica el punto $\varphi(t_j)$ de C sobre el que están definidas. La intersección es, en cada caso, un único punto debido a la generalidad de las subvariedades σ^i y Φ^i de $\text{Gr}(r, n)$. Queda así probado que

$$\boxed{\mathbf{a} \cdot \alpha = 1}$$

como queríamos.

Consideremos ahora el segundo caso: $\mathbf{b} \cdot \beta$. Ahora el ciclo $\beta \in A^{mi}(R)$ queda determinado al fijar en $\text{Gr}(r, n)^m$ un ciclo

$$[D] := [\sigma^{i+1} \times \cdots \times \sigma^{i+1}],$$

con σ^{i+1} una subvariedad de Schubert especial fijada de codimensión $(i+1)$. El esquema Z que interviene en la definición es ahora

$$Z := \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1 \times R,$$

esto es

$$\beta := \frac{1}{m!} \pi_* \left[p_{1*} \left(p_2^* [D] \cdot i_* [\tilde{\mathcal{Q}}_m] \right) \right].$$

La familia que define al ciclo \mathbf{b} es imagen de un morfismo a R de un espacio S de parámetros de la forma

$$T_0 := \{x_1\} \times \Phi^i \times \cdots \times \{x_m\} \times \Phi^i,$$

con x_1, \dots, x_m puntos fijados y distintos en \mathbb{P}^1 . El ciclo \mathbf{a}_Z no adquiere ahora multiplicidad, esto $K' = 1$, y así $K'' = \frac{1}{m!}$. Con el mismo argumento aplicado antes a la familia para \mathbf{a} , se tiene que cada punto de la familia de \mathbf{b} distingue los mismos tipos de m -uplas en $\text{Gr}(r, n)^m$, y sólo los del tipo 4 pueden verificar el corte con

$$\sigma^{i+1} \times \cdots \times \sigma^{i+1}.$$

Las variedades lineales en los puntos $\varphi(x_j)$ fijados en la curva C , son ahora $(i+1)$ -dimensionales, y por lo tanto cada una de ellas determina un único

punto de intersección con el ciclo σ^{i+1} . Como no se ha fijado un orden en los puntos x_1, \dots, x_m , esta intersección tiene $m!$ maneras de realizarse y así

$$\boxed{b \cdot \beta = \frac{1}{m!} \cdot m! = 1}$$

como queríamos demostrar. □

Nos queda, por último, verificar el siguiente

Lema 17 Sean

$$\begin{aligned} \alpha &= Y_{n-r}^{(y_{n-r})} \cdot \dots \cdot Y_1^{(y_1)} \cdot T_{n-r-1}^{(t_{n-r-1})} \cdot \dots \cdot T_1^{(t_1)}, \\ &\quad \text{con multiexponente } (\alpha) := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n-2r+1}) \\ \mathbf{a} &= B_{n-r}^{(b_{n-r})} \cdot \dots \cdot b_1^{(b_1)} \cdot C_{n-r-1}^{(c_{n-r-1})} \cdot \dots \cdot C_1^{(c_1)}, \\ &\quad \text{con multiexponente } (\mathbf{a}) := (a_1, a_2, \dots, a_{2n-2r+1}) \end{aligned}$$

ciclos en $A^*(R)$ con $h(\alpha) = h(\mathbf{a})$, $p(\alpha) = p(\mathbf{a})$ y tales que existe un índice j_0 , con $\alpha_i = a_i$ para todo $i = 1, \dots, j_0 - 1$, y $\alpha_{j_0} > a_{j_0}$, entonces

$$\mathbf{a} \cdot \alpha = 0.$$

Además, si $(\alpha) = (\mathbf{a})$ entonces

$$\mathbf{a} \cdot \alpha = 1.$$

Demostración: Supongamos en primer lugar el caso en que, en las condiciones del lema $(\alpha) \neq (\mathbf{a})$, y separemos éste en dos.

Caso 1. $j_0 = n - r + \ell > n - r$

El primer exponente distinto aparece sobre los monomios T_ℓ y C_ℓ . El argumento seguido en la demostración del lema anterior, muestra cómo, en este caso, la familia que define al ciclo \mathbf{a} , fija todos los puntos de soporte en sus haces de torsión. Además, las condiciones de paso por las distintas subvariedades de Schubert especiales que se imponen en α por los monomios de tipo Y_j , sólo pueden ser verificadas por los monomios en \mathbf{a} del tipo B_j . Efectivamente, el soporte del ciclo final \mathbf{a}_G está formado de distintos tipos de subvariedades, determinadas por las distintas m -uplas descritas en la demostración anterior, y basta seguir el mismo argumento de ésta. En particular, todas las condiciones de los monomios Y_j son así satisfechas, por la igualdad de las primeras componentes en ambos multiexponentes.

Quedan así por cumplir las condiciones de paso por las subvariedades de Schubert de los monomios T_j . En particular, las de un tal monomio sólo puede ser verificada por un monomio en la familia C_k con $k \geq j$ (los

B_m ya quedaron acoplados.) Así, este último objetivo no se puede realizar completamente para T_ℓ puesto que

$$t_i = c_i, (i = 1, \dots, \ell - 1), \quad \text{pero } t_\ell > c_\ell.$$

Caso 2. $j_0 \leq n - r$

En este caso, hemos de tener en cuenta que la parte *móvil* en la familia (la de puntos de soporte en los haces de torsión que no están fijados) puede producir componentes en que ambos de estos puntos hayan coincidido, elevando el grado del correspondiente haz de torsión. De esta manera, una condición con cierto peso correspondiente a un monomio Y_j puede ser verificada agrupando varios monomios B_k con $k < j$. Pero un tal agrupamiento disminuye el número de puntos arbitrarios en la familia. Estaríamos entonces en la situación descrita en la demostración del lema 15, esto es con $p(\alpha) > p(a)$, y por tanto, estas componentes producen intersecciones vacías. Así, sólo nos queda la posibilidad de verificar las condiciones de cada Y_j con los B_k de subíndice $k \geq j$, pues claramente, los monomios C_m no pueden realizarlas al tener los soportes en los haces de torsión fijados por construcción. Se termina el argumento entonces igual que en el caso anterior.

Finalmente, si ambos multiexponentes coinciden, es claro que hay al menos una intersección realizada acoplando cada potencia $Y_j^{y_j}$ con $B_j^{b_j}$, y T_m con $C_m^{c_m}$, por el lema (16). Además, cualquier otra combinación plantea intersecciones que son nulas por la primera parte del lema. \square

Hemos probado así el

Teorema 6 Sea $\mathbb{B}(k)$ el conjunto formado por los ciclos de la forma

$$\alpha = Y_{n-r}^{(y_{n-r})} \cdot \dots \cdot Y_1^{(y_1)} \cdot T_{n-r-1}^{(t_{n-r-1})} \cdot \dots \cdot T_1^{(t_1)},$$

con

$$d > k = \left(\sum_{i=1}^{n-r-1} i(y_i + t_i) \right) + (n-r) \cdot y_{n-r};$$

y $\mathbb{B}(k)^\vee$ el conjunto análogo de ciclos

$$a = B_{n-r}^{(b_{n-r})} \cdot \dots \cdot b_1^{(b_1)} \cdot C_{n-r-1}^{(c_{n-r-1})} \cdot \dots \cdot C_1^{(c_1)},$$

con

$$d > k = \left(\sum_{i=1}^{n-r-1} i(b_i + c_i) \right) + (n-r) \cdot b_{n-r}.$$

Entonces, $\mathbb{B}(k)$ y $\mathbb{B}(k)^\vee$ describen \mathbb{Z} -bases para los grupos $A^k(R)$ y $A^{\dim(R)-k}(R)$, respectivamente.

Apéndice: Números de Betti

Denotaremos por R_P^0 la variedad de morfismos de \mathbb{P}^1 en \mathbb{P}^3 de grado fijo d . El esquema Quot correspondiente se denotará R_P . Notaciones análogas, R_G^0 y R_G , usaremos para la variedad de morfismos de \mathbb{P}^1 en $\mathbb{G}(1, 3)$, con grado fijo d , y su esquema Quot.

En este apéndice hacemos efectivo el cálculo de los números de Betti para los esquemas R_P y R_G . Se estudian en cada caso los conjuntos F y F_k , así como la aplicación $h : F \rightarrow \mathbb{Z}$, definidos en el capítulo (2). Sabemos que los rangos de los grupos de Chow vienen dados por :

$$b_{2k}(R) = \text{rango } A^k(R) = |F_k|.$$

En lo que sigue denotaremos por F_P al conjunto F para el esquema R_P , y por F_G el correspondiente a R_G . Ambos son subconjuntos de \mathbb{N}^{12} y están definidos por ternas (α, β, δ) de elementos de \mathbb{N}^4 tales que

- $\sum \delta_i = 3$ para F_P , y $\sum \delta_i = 2$ para F_G ;
- $\delta_i = 0$ ó 1 ;
- $\sum \delta_i(\alpha_i + \beta_i) = d$;
- $\alpha_i = \beta_i = 0$ si $\delta_i = 0$.

Sus cardinales son:

$$|F_P| = 4 \binom{d+5}{d}, \quad |F_G| = 6 \binom{d+3}{d}.$$

La aplicación h restringida a cada uno de estos conjuntos, tiene recorridos

$$\begin{aligned} h(F_P) &= \{k \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq k \leq \dim(R_P) = 4d + 3\} \\ h(F_G) &= \{k \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq k \leq \dim(R_G) = 4d + 4\}. \end{aligned}$$

Por otra parte, ya vimos en el capítulo (2) cómo esta aplicación adopta distintas configuraciones. En los casos que nos ocupan, h es de $\binom{4}{1} = 4$ tipos

para F_P , y de $\binom{4}{2} = 6$ para F_G . A la hora de calcular el cardinal de un F_k determinado, esto último nos permite hacerlo partiendo F_k en N , 4 ó 6, subconjuntos disjuntos que denotaremos F_k^1, \dots, F_k^N , dados por

$$\begin{aligned} F_k^i &= F^i \cap F_k \\ &= \{(\alpha, \beta, \delta[i]) \in F_k \mid h_i((\alpha, \beta)) = k\}. \end{aligned}$$

De esta manera:

$$b_{2k}(R) = |F_k| = \sum_{i=1}^N |F_k^i|. \quad (.33)$$

.1 Números de Betti de R_P

Calculamos ahora en detalle el cardinal de F_k para R_P , distinguiendo los casos $k \leq d$ y $k > d$.

Caso 1: $\boxed{k \leq d}$

Por los lemas (9) y (10) del capítulo (2), sabemos que para $k \leq d$, los números de Betti correspondientes sólo se calculan en las sumas de tipo:

$$h_1 = \alpha_3 + 2\alpha_4 + \beta_2 + 2\beta_3 + 3\beta_4.$$

El número $p(k)$ de maneras distintas de verificar

$$\alpha_3 + 2\alpha_4 + \beta_2 + 2\beta_3 + 3\beta_4 = k$$

con enteros no negativos, coincide con el de monomios mónicos de grado total k en las variables X, Y, Z, T, U , siendo

$$\begin{array}{ll} X & \text{de grado 3} \\ Y & \text{de grado 2} \\ Z & \text{de grado 1} \\ T & \text{de grado 2} \\ U & \text{de grado 1.} \end{array}$$

Es claro que el grado de un monomio tal, digamos

$$X^x Y^y Z^z T^t U^u$$

es igual a la suma $3x + 2y + z + 2t + u$, donde todas las variables son enteros no negativos. La equivalencia con nuestro problema inicial es así obvia. En

el ejemplo 6 del apéndice sobre funciones generatrices, se comprueba que el valor de $p(k)$ tiene las siguientes expresiones polinómicas:

$$\begin{aligned} C \cdot (k^4 + 18k^3 + 112k^2 + 288k + 288) & \text{ si } k \equiv 0(6) \\ C \cdot (k^4 + 18k^3 + 112k^2 + 270k + 175) & \text{ si } k \equiv \pm 1(6) \\ C \cdot (k^4 + 18k^3 + 112k^2 + 288k + 256) & \text{ si } k \equiv \pm 2(6) \\ C \cdot (k^4 + 18k^3 + 112k^2 + 270k + 207) & \text{ si } k \equiv 3(6) \end{aligned}$$

siendo $C = \frac{1}{288}$.

Caso 2: $k > d$

En las cuentas que abordamos a continuación tiene una especial relevancia la definición de F , en concreto la condición $\sum(\alpha_i + \beta_i) = d$. Veremos cómo esta condición disminuye el número de soluciones posibles, hecho que no ocurría en el caso anterior.

Supongamos dado un entero $k \in [d + 1, 2d + 1]$, y sea como antes

$$F_k = \{(\alpha, \beta, \delta) \in F \mid h(\alpha, \beta, \delta) = k\}.$$

Es claro que el cardinal $|F_k|$ se puede calcular como la suma de los cardinales de los siguientes 4 conjuntos disjuntos:

$$\begin{aligned} F_k^1 &= \{(\alpha, \beta, (0, 1, 1, 1)) \in F \mid h_1 = k\} \\ F_k^2 &= \{(\alpha, \beta, (1, 0, 1, 1)) \in F \mid h_2 = k\} \\ F_k^3 &= \{(\alpha, \beta, (1, 1, 0, 1)) \in F \mid h_3 = k\} \\ F_k^4 &= \{(\alpha, \beta, (1, 1, 1, 0)) \in F \mid h_4 = k\}, \end{aligned}$$

(ver Ejemplo 1 §2.2.1, capítulo 2).

La determinación de cada uno de estos 4 cardinales requiere resolver un sistema de inecuaciones con, a lo más, 6 variables enteras no negativas.

Así, por ejemplo, el cardinal de F_k^1 vendrá dado por el número de soluciones de la forma $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \in \mathbb{N}^6$ al sistema

$$\begin{aligned} \alpha_3 + 2\alpha_4 + \beta_2 + 2\beta_3 + 3\beta_4 &= k \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 &= d \end{aligned} \quad (.34)$$

o al sistema

$$\begin{aligned} \alpha_3 + 2\alpha_4 + \beta_2 + 2\beta_3 + 3\beta_4 &= k \\ \alpha_3 + \alpha_4 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 &\leq d, \end{aligned} \quad (.35)$$

donde hemos obviado la variable α_2 , pasando de la igualdad (.34) a la desigualdad (.35). Ahora bien, dada una solución $(\alpha_3, \alpha_4, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \in \mathbb{N}^5$ al segundo sistema, el vector

$$(d - (\alpha_3 + \alpha_4 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4), \alpha_3, \alpha_4, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \in \mathbb{N}^6$$

es solución al sistema original, y esto da una biyección entre las soluciones a ambos.

Finalmente, y por comodidad, escribiremos éste en las variables x, y, z, t, u , y en la resolución hablaremos del número de soluciones enteras no negativas a dicho tipo de sistemas, refiriéndonos al número de vectores (x, y, z, t, u) correspondientes en el conjunto F_k^1 . Denotaremos además a k por

$$k = d + l \quad 1 \leq l \leq d + 1.$$

De manera análoga, estableceremos los sistemas para F_k^2, F_k^3 y F_k^4 . El problema queda así reducido a la resolución de los siguientes sistemas:

$$\text{para } |F_{d+l}^1| \quad \begin{cases} 3x + 2(y + t) + (z + u) = d + l \\ x + y + z + t + u \leq d \end{cases} \quad (.36)$$

$$\text{para } |F_{d+l}^2| \quad \begin{cases} 2x + y + z + t = l - 1 \\ x + y + z + t + p + q = d \end{cases} \quad (.37)$$

$$\text{para } |F_{d+l}^3| \quad \begin{cases} 2(x + y) + z + t + u = l - 2 \\ x + y + z + t + u + j = d, \end{cases} \quad (.38)$$

$$\text{para } |F_{d+l}^4| \quad \begin{cases} 3x + 2(y + t) + z + u = l - 3 \\ x + y + z + t + u \leq d. \end{cases} \quad (.39)$$

Cardinal de F_{d+l}^1

Queremos calcular el número de soluciones enteras no negativas al sistema

$$(I) \begin{cases} 3x + 2(y + t) + (z + u) = d + l \\ x + y + z + t + u \leq d \end{cases}$$

que es equivalente al sistema

$$(II) \begin{cases} 2X + Y = d + l - j \\ X + Y = j - k \\ 0 \leq j \leq d \\ 0 \leq k \leq j \end{cases}$$

donde:

$$X = x, \quad Y = y + t, \quad k = z + u, \quad j = x + y + z + t + u.$$

Cada solución entera no negativa en las variables X, Y del sistema (II), aporta $(Y + 1)(k + 1)$ soluciones al sistema (I).

El sistema (II) tiene, para cada par (k, j) de coordenadas enteras, una solución única

$$X = d + l - 2j + k \quad Y = 3j - 2k - d - l,$$

de manera que, para contabilizar el número de soluciones buscadas de (I), basta contar, con su peso, el número de pares (k, j) de coordenadas enteras no negativas en el dominio D dado por las inecuaciones de (II), junto a las condiciones $X, Y \geq 0$. Se tiene así el siguiente sistema de inecuaciones en el plano KJ :

$$\begin{cases} 0 \leq j \leq d \\ 0 \leq k \leq j \\ 2j - k \leq d + l \quad (\Leftrightarrow X \geq 0) \\ 3j - 2k \geq d + l \quad (\Leftrightarrow Y \geq 0). \end{cases}$$

Cada par (k, j) en D tiene un peso

$$P(k, j) = (Y + 1)(k + 1) \quad (.40)$$

$$= (3j - 2k - d - l + 1)(k + 1). \quad (.41)$$

Pasemos al cálculo de la zona D determinada por este sistema. Sean $l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5$ las rectas

$$\begin{aligned} l_0 : & \quad k = 0 \\ l_1 : & \quad j = d \\ l_2 : & \quad j = k \\ l_3 : & \quad 2j - k = d + l \\ l_4 : & \quad 3j - 2k = d + l \\ l_5 : & \quad j = \frac{d+l}{2}. \end{aligned}$$

El sistema de inecuaciones tiene sus soluciones en la zona del primer cuadrante del plano KJ , por encima de l_2 y l_4 , y por debajo de l_1 y l_3 . Concretando aún más, dados los siguientes puntos

$$P_1 = l_0 \cap l_3 = \left(0, \frac{d+l}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
P_2 &= l_1 \cap l_3 = (d-l, d) \\
P_3 &= l_1 \cap l_4 = \left(\frac{2d-l}{2}, d\right) \\
P_4 &= l_0 \cap l_4 = \left(0, \frac{d+l}{3}\right) \\
P_5 &= l_4 \cap l_5 = \left(\frac{d+l}{1}, \frac{d+l}{2}\right) \\
Q_1 &= l_1 \cap l_2 = (d, d) \\
Q_2 &= l_3 \cap l_4 = (d+l, d+l) \\
Q_3 &= l_0 \cap l_1 = (0, d).
\end{aligned}$$

El dominio D es:

1. para $l = d+1$, el triángulo $Q_3P_3P_4$, con

$$Q_3 = (0, d), \quad P_3 = ((d-1)/2, d), \quad P_4 = (0, (2d+1)/3);$$

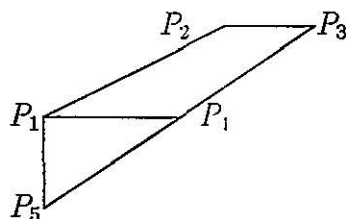
2. para $l = d$, el triángulo $P_1P_3P_4$, con

$$P_1 = P_2 = Q_3 = (0, d), \quad P_3 = (d/2, d), \quad P_4 = (0, (2d)/3);$$

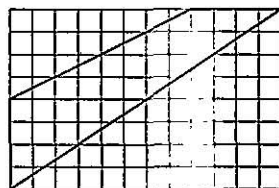
3. para $0 < l < d$, el cuadrilátero $P_1P_2P_3P_4$;

Para las cuentas posteriores conviene descomponer el cuadrilátero $P_1P_2P_3P_4$ como unión del triángulo $D_1 = P_1P_5P_4$ y el cuadrilátero $D_2 = P_1P_2P_3P_5$.

Este es el tipo de dominio en los casos $0 < l < d$.



La cuenta a realizar requiere el conocimiento de todos los puntos del dominio D que tienen coordenadas enteras no negativas. Llamemos S al dominio reticular $S = D \cap \mathbb{Z}^2$. Por ejemplo, en el siguiente gráfico



el conjunto S está formado por los vértices del cuadrículado que caen en el interior de la zona resaltada.

El número buscado de soluciones a (I) es el resultado de realizar la siguiente suma doble

$$\sum_{(k,j) \in S} \sum P(k,j).$$

A la vista de la forma de los vértices del dominio D , esta suma dependerá, *a priori*, de cada una de las congruencias módulo 6 de $d+l$, y de la paridad de l . Esto es, tendremos que distinguir un total de $6 \cdot 2 = 12$ casos distintos. Puesto que el peso a sumar, $P(k,j)$ dado por (.41), es un polinomio de grado 2, el resultado, en cada caso, de esta suma será un polinomio S en las variables d y l de grado menor o igual a 4, que calcularemos por interpolación.

La función $S(d,l)$ viene dada por:

$$S(d,l) = \sum_{j=\left[\frac{d+l+2}{3}\right]}^{\left[\frac{d+l}{2}\right]} \sum_{k=0}^{[r_0(j)]} P(k,j) + \sum_{j=\left[\frac{d+l}{2}\right]+1}^d \sum_{k=r_1(j)}^{[r_0(j)]} P(k,j),$$

siendo:

$P(k,j) = (3j - 2k - (d+l) + 1)(k+1)$ la función peso;

$[\cdot]$ la función parte entera;

$r_0(j)$ el valor de k en la recta de ecuación $k = \frac{3j-(d+l)}{2}$;

$r_1(j)$ el valor de k en la recta de ecuación $k = 2j - (d+l)$;

todas las sumas sobre los valores enteros de los rangos dados en las variables k, j .

Así las cosas, el polinomio que nos da la aportación de h_1 al rango de $A^{d+l}(R)$ para $1 \leq l \leq d+1$, es el polinomio interpolador de la función $S(d,l)$. Para calcularlo, puesto que tiene grado a lo más 4, bastará en cada uno de los 12 posibles casos, conocer para 25 valores distintos $S(d,l)$.

Como resultado de la interpolación, si denotamos por A_i el polinomio en las variables d y l , para l par y $d+l \equiv i(6)$, y por B_i su análogo para l impar, se tiene que:

l par	$d + l \equiv 0(6)$	$A_0 = \frac{d^4 + 2d^3 \cdot f_1(l) + 2d^2 \cdot f_2(l) - 2d \cdot f_3^0(l) + f_4^0(l)}{288}$
l par	$d + l \equiv \pm 1(6)$	$A_1 = \frac{d^4 + 2d^3 \cdot f_1(l) + 2d^2 \cdot f_2(l) - 2d \cdot f_3^1(l) + f_4^0(l)}{288}$
l par	$d + l \equiv \pm 2(6)$	$A_2 = \frac{d^4 + 2d^3 \cdot f_1(l) + 2d^2 \cdot f_2(l) - 2d \cdot f_3^0(l) + f_4^2(l)}{288}$
l par	$d + l \equiv 3(6)$	$A_3 = \frac{d^4 + 2d^3 \cdot f_1(l) + 2d^2 \cdot f_2(l) - 2d \cdot f_3^1(l) + f_4^3(l)}{288}$
l impar	$d + l \equiv 0(6)$	$B_0 = \frac{d^4 + 2d^3 \cdot f_1(l) + 2d^2 \cdot f_2(l) - 2d \cdot g_3^0(l) + g_4^0(l)}{288}$
l impar	$d + l \equiv \pm 1(6)$	$B_1 = \frac{d^4 + 2d^3 \cdot f_1(l) + 2d^2 \cdot f_2(l) - 2d \cdot g_3^1(l) + g_4^1(l)}{288}$
l impar	$d + l \equiv \pm 2(6)$	$B_2 = \frac{d^4 + 2d^3 \cdot f_1(l) + 2d^2 \cdot f_2(l) - 2d \cdot g_3^0(l) + g_4^2(l)}{288}$
l impar	$d + l \equiv 3(6)$	$B_3 = \frac{d^4 + 2d^3 \cdot f_1(l) + 2d^2 \cdot f_2(l) - 2d \cdot g_3^1(l) + g_4^3(l)}{288}$

siendo:

$$f_1(l) = 2l + 9;$$

$$f_2(l) = 3l^2 + 27l + 56;$$

$$f_3^i(l) = \begin{cases} 10l^3 + 27l^2 - 52l - 144 & \text{si } i \text{ es par} \\ 10l^3 + 27l^2 - 52l - 135 & \text{si } i \text{ es impar;} \end{cases}$$

$$f_4^0(l) = 10l^4 - 104l^2 + 288;$$

$$f_4^1(l) = 10l^4 - 104l^2 - 18l + 175;$$

$$f_4^2(l) = 10l^4 - 104l^2 + 256;$$

$$f_4^3(l) = 10l^4 - 104l^2 - 18l + 207;$$

$$f_4^4(l) = f_4^2(l);$$

$$f_4^5(l) = f_4^1(l);$$

$$g_1(l) = 2l + 9;$$

$$g_2(l) = 3l^2 + 27l + 56;$$

$$\begin{aligned}
g_3^i(l) &= \begin{cases} 10l^3 + 27l^2 - 52l - 126 & \text{si } i \text{ es par} \\ 10l^3 + 27l^2 - 52l - 117 & \text{si } i \text{ es impar;} \end{cases} \\
g_4^0(l) &= 10l^4 - 104l^2 + 18l + 207; \\
g_4^1(l) &= 10l^4 - 104l^2 + 94; \\
g_4^2(l) &= 10l^4 - 104l^2 + 18l + 175; \\
g_4^3(l) &= 10l^4 - 104l^2 + 126; \\
g_4^4(l) &= g_4^2(l); \\
g_4^5(l) &= g_4^1(l).
\end{aligned}$$

Cardinal de F_{d+1}^2

La aportación de h_2 aparece en los rangos de $A^{d+l}(R)$ con $1 \leq l \leq d+1$. El problema a resolver ahora es el de calcular el número de soluciones enteras positivas al sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z + t = l - 1 \\ x + y + z + t + p + q = d \end{cases}$$

o, equivalentemente, al sistema:

$$\begin{cases} 2X + Y = l - 1 \\ X + Y = d - j \end{cases}$$

siendo $X = x$, $Y = y + z + t$, $j = p + q$. Cada solución a este último sistema dará lugar a $\binom{Y+2}{2} \cdot (j+1)$ soluciones del primero. Ahora bien, el segundo tiene soluciones

$$X = l - 1 - (d - j) \quad Y = 2(d - j) - (l - 1) \quad j = j.$$

Estas serán enteras no negativas, siempre que:

$$\begin{aligned}
X \geq 0 &\Rightarrow j \geq d - (l - 1); \\
Y \geq 0 &\Rightarrow j \leq d - \frac{l-1}{2}; \\
&\text{y, en consonancia con la primera desigualdad} \\
j \geq 0 &\Rightarrow l \leq d + 1.
\end{aligned}$$

La siguiente suma cuenta el número de soluciones al primer sistema:

$$\sum_{d - (l-1) \leq j \leq d - \frac{l-1}{2}} P(j),$$

siendo

$$\begin{aligned} P(j) &= \binom{Y+2}{2}(j+1) \\ &= \binom{2(d-j) - (l-1) + 2}{2}(j+1), \end{aligned}$$

y donde sumamos sobre todos los enteros no negativos del rango señalado. Así el cardinal de F_{d+l}^2 , para $1 \leq l \leq d+1$ viene dado por los siguientes polinomios:

l par	$C_0(d, l) = \frac{d(2l^3+9l^2+10l)}{24} - \frac{l(7l^3+18l^2-28l-72)}{96}$
l impar	$C_1(d, l) = \frac{d(2l^3+9l^2+10l+3)}{24} - \frac{7l^4+18l^3-28l^2-66l-27}{96}$

Cardinal de F_{d+l}^3

La aportación de h_3 aparece en los rangos de $A^{d+l}(R)$ con $2 \leq l \leq d+1$. Se pretende averiguar el número de soluciones enteras no negativas al sistema:

$$\begin{cases} 2(x+y) + z + t + u = l-2 \\ x + y + z + t + u + j = d, \end{cases}$$

o, equivalentemente, al sistema:

$$\begin{cases} x + y = l-2 - (d-j) \\ x + y + z + t + u = d-j. \end{cases}$$

Por comodidad, escribiremos este último en la forma

$$\begin{cases} X = l-2 - (d-j) \\ k = 2(d-j) - (l-2) \end{cases}$$

siendo, $X = x + y$, $k = z + t + u$. Cada solución del sistema en las variables X , k , aportará $P(j) = (X+1) \cdot \binom{k+2}{2}$ soluciones al sistema original. Por otra parte, pedir que las soluciones sean enteros no negativos, establece las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} X \geq 0 &\Rightarrow j \geq d-l+2 \\ k \geq 0 &\Rightarrow j \leq d+1 - \frac{l}{2}. \end{aligned}$$

Además j ha de ser también mayor o igual que cero; pero esto queda asegurado al ser $l \leq d+1$.

El número buscado surge así como resultado del cómputo de la siguiente suma

$$\sum_{d-l+2 \leq j \leq d+1-\frac{l}{2}} P(j),$$

con:

$$P(j) = (l-1-d+j) \cdot \binom{2(d-j)-(l-2)+2}{2}.$$

Finalmente, se tiene que $|F_{d+l}^3|$ viene dado por los polinomios:

l par	$D_0(l) = \frac{l^2(l^2+6l+8)}{96}$
l impar	$D_1(l) = \frac{(l-1)(l^3+7l^2+15l+9)}{96}$

Cardinal de F_{d+1}^4

La aportación de h_4 aparece en los rangos de $A^{d+l}(R)$ con $3 \leq l \leq d+1$. Se trata ahora de resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2(y+t) + z + u = l-3 \\ x + y + z + t + u \leq d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2(y+t) + z + u = l-3 \\ x + y + z + t + u \leq l-3. \end{cases}$$

Ahora bien, el número de soluciones enteras no negativas a un sistema tal, se calculó en el caso ($k \leq d$). El resultado ahora es:

$l \equiv 0(6)$	$E_0(l) = \frac{l(l^3+6l^2+4l-24)}{288}$
$l \equiv \pm 1(6)$	$E_1(l) = \frac{l^4+6l^3+4l^2-6l-5}{288}$
$l \equiv \pm 2(6)$	$E_2(l) = \frac{l^4+6l^3+4l^2-24l-32}{288}$
$l \equiv 3(6)$	$E_3(l) = \frac{l^4+6l^3+4l^2-6l+27}{288}$

Cardinal de F_{d+l}

En definitiva, y puesto que $|F_{d+l}| = \sum_{i=1}^l |F_{d+l}^i|$, el rango de $A^{d+l}(R_P)$ es el resultado de sumar los polinomios adecuados en cada caso, concretamente:

$$\begin{aligned} |F_{d+1}| &= |F_{d+1}^1| + |F_{d+1}^2| \\ &= B_i(d, 1) + C_1(d, 1) \quad (i = 0, 1, 2, 3); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |F_{d+2}| &= |F_{d+2}^1| + |F_{d+2}^2| + |F_{d+2}^3| \\ &= A_i(d, 2) + C_0(d, 2) + D_0(2) \quad (i = 0, 1, 2, 3); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |F_{d+l}| &= |F_{d+l}^1| + |F_{d+l}^2| + |F_{d+l}^3| + |F_{d+l}^4| \\ &= \begin{cases} A_i(d, l) + C_j(d, l) + D_j(l) + E_t(l) \\ B_i(d, l) + C_j(d, l) + D_j(l) + E_t(l) \end{cases} \\ &\text{siendo: } d+l \equiv i(6), l \equiv j(2), l \equiv t(6). \end{aligned}$$

.2 Números de Betti de R_G

Desarrollamos ahora las cuentas que determinan el cardinal de F_k para el esquema R_G , separando los casos $k \leq d$ y $k > d$.

Caso 1: $\boxed{k \leq d}$

Como en el caso homónimo para R_P , los rangos de $A^k(R)$, con $0 \leq k \leq d$, se pueden determinar resolviendo el problema combinatorio equivalente de determinar el número $p(k)$ de monomios mónicos de grado total k en las variables X, Y, Z , siendo

$$\begin{aligned} X &\text{ de grado 2} \\ Y &\text{ de grado 1} \\ Z &\text{ de grado 1.} \end{aligned}$$

Este número, $p(k)$, viene dado entonces por (ver ejemplo 7 del apéndice sobre funciones generatrices):

k par	$G_0(k) := \frac{k^2+4k+4}{4}$
k impar	$G_1(k) := \frac{k^2+4k+3}{4}$

Caso 2: $k < d$

Para $k = d + l > d$, los conjuntos F_{d+l} tienen ahora una descomposición en los 6 conjuntos disjuntos:

$$\begin{aligned} F_{d+l}^1 &= \{(\alpha, \beta, (0, 0, 1, 1) \in F \mid h_1 = d + l\} \\ F_{d+l}^2 &= \{(\alpha, \beta, (0, 1, 0, 1) \in F \mid h_2 = d + l\} \\ F_{d+l}^3 &= \{(\alpha, \beta, (0, 1, 1, 0) \in F \mid h_3 = d + l\} \\ F_{d+l}^4 &= \{(\alpha, \beta, (1, 0, 0, 1) \in F \mid h_4 = d + l\} \\ F_{d+l}^5 &= \{(\alpha, \beta, (1, 0, 1, 0) \in F \mid h_5 = d + l\} \\ F_{d+l}^6 &= \{(\alpha, \beta, (1, 1, 0, 0) \in F \mid h_6 = d + l\}, \end{aligned}$$

(ver Ejemplo 2 §2.2.1, capítulo 2).

Por otra parte nos estamos restringiendo, por dualidad, a los rangos de los grupos $A^k(R_G)$ para $0 \leq k \leq 2d + 2$. Puesto que las sumas de tipo:

$$\begin{aligned} h_5 &= 2d + 3 + \beta_1 + \beta_3 \\ h_6 &= 2d + 4 + \alpha_2 + \beta_1 + 2\beta_2 \end{aligned}$$

son ambas superiores a $2d + 2$, el cardinal de F_{d+l} , con $1 \leq l \leq d + 2$, viene dado por la fórmula:

$$|F_{d+l}| = |F_{d+l}^1| + |F_{d+l}^2| + |F_{d+l}^3| + |F_{d+l}^4|.$$

En un proceso análogo al caso de R_P , se plantean los siguientes sistemas:

$$\text{para } |F_{d+l}^1| \quad \begin{cases} 2x + y + z = d + l \\ x + y + z \leq d \end{cases} \quad (.42)$$

$$\text{para } |F_{d+l}^2| \quad \begin{cases} x + y = l - 1 \\ x + y + z + t = d \end{cases} \quad (.43)$$

$$\text{para } |F_{d+l}^3| \text{ y } |F_{d+l}^4| \quad \begin{cases} 2x + y + z = l - 2 \\ x + y + z \leq d. \end{cases} \quad (.44)$$

Cardinal de F_{d+l}^1

Se quiere conocer el número de soluciones enteras no negativas al sistema:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= d + l \\ x + y + z &\leq d \end{aligned}$$

para $0 \leq l \leq d$. Si denotamos por $t = y + z$ el sistema queda en la forma:

$$\begin{cases} 2x + t = d + l \\ x + t \leq d \\ t = y + z. \end{cases}$$

La resolución de éste es sencilla. Basta delimitar en el plano XT la zona dada por la desigualdad; y contar cada solución al sistema

$$\begin{cases} 2x + t = d + l \\ x + t = d + l - j \end{cases}$$

con $l \leq j \leq \left\lfloor \frac{d+l}{2} \right\rfloor$ (cf. Figura 1), y con el peso $P(j)$ adecuado, a saber

$$P(j) = |\{y + z = t\}| = |\{y + z = d + l - 2j\}| = d + l - 2j + 1.$$

El valor superior del rango de j es:

$$\left\lfloor \frac{d+l}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{d+l}{2} & \text{si } d+l \equiv 0(2) \\ \frac{d+l-1}{2} & \text{si } d+l \equiv 1(2). \end{cases}$$

Y, puesto que la solución es única, basta calcular la suma de los pesos:

$$\sum_j (d + l - 2j + 1),$$

obteniéndose el siguiente resultado para $|F_{d+l}^1|$:

$d + l \equiv 0(2)$	$R_0(d, l) = \frac{l^2 - 2l(d + 2)}{4} + \frac{d^2 + 4d + 4}{4}$
$d + l \equiv 1(2)$	$R_1(d, l) = \frac{l^2 - 2l(d + 2)}{4} + \frac{d^2 + 4d + 3}{4}$

siempre que $1 \leq l \leq d$.

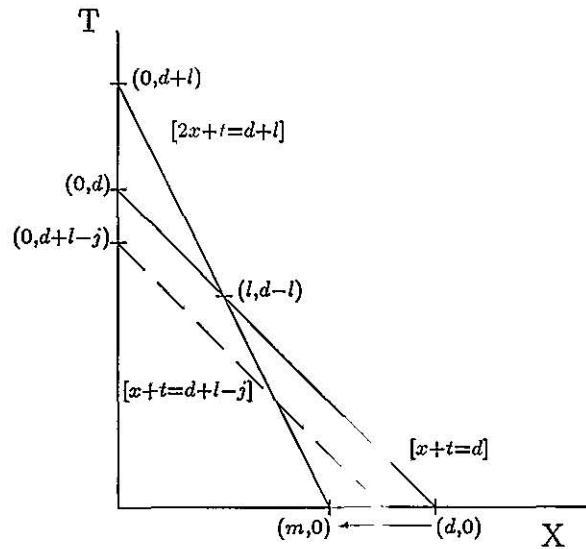


Figura 1

Cardinal de F_{d+l}^2

La aportación de h_2 aparece en los rangos de $A^{d+l}(R)$ con $1 \leq l \leq d+1$.

El problema a resolver ahora es el de calcular el número de soluciones enteras positivas al sistema:

$$\begin{cases} x + y = l - 1 \\ z + t + x + y = d \end{cases}$$

o, equivalentemente, al sistema:

$$\begin{cases} x + y = l - 1 \\ z + t = d - l + 1. \end{cases}$$

Así, $|F_{d+l}^2|$ viene dado por el polinomio:

$$Q(d, l) = l \cdot (d - l + 2),$$

para $1 \leq l \leq d+1$.

Cardinales de F_{d+l}^3 y F_{d+l}^4

La aportación de h_3 , al igual que la de h_4 , aparece en los rangos de $A^{d+l}(R)$ con $2 \leq l \leq 2d+2$. El problema a resolver ahora es el de calcular

el número de soluciones enteras positivas al sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z = l - 2 \\ x + y + z \leq d. \end{cases}$$

Para $2 \leq l \leq d+2$, el problema queda equivalente al del caso $k \leq d$. Los cardinales de F_{d+l}^3 y F_{d+l}^4 vienen dados por los polinomios:

$l \equiv 0(2)$	$X_0(l) = \frac{l^2}{4}$
$l \equiv 1(2)$	$X_1(l) = \frac{l^2 - 1}{4}$

Cardinal de F_{d+l}

El rango de $A^{d+l}(R_G)$, para $1 \leq l \leq d+2$, viene así dado por:

$$|F_{d+l}| = \begin{cases} R_i(d, 1) + Q(d, 1) & l = 1, \quad d+l \equiv i(2) \\ R_i(d, l) + Q(d, l) + 2X_j(l) & 2 \leq l \leq d, \quad d+l \equiv i(2), l \equiv j(2) \\ Q(d, d+1) + 2X_j(d+1) & l = d+1, \quad d+1 \equiv j(2) \\ 2X_j(d+2) & l = d+2, \quad d \equiv j(2). \end{cases}$$

Por otra parte se tienen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} R_1(d, d+1) &\equiv 0, & R_0(d, d+2) &\equiv 0, \\ Q(d, d+2) &\equiv 0, & X_1(1) &= 0, \end{aligned}$$

de donde, para toda l , $1 \leq l \leq d+2$, se tiene:

$$|F_{d+l}| = R_i(d, l) + Q(d, l) + 2X_j(l) \\ \text{donde } d+l \equiv i(2) \text{ y } l \equiv j(2).$$

Apéndice: Funciones generatrices

Ejemplo 6 Queremos contar el número $p(k)$ de monomios mónicos de grado total k en las variables X, Y, Z, T y U .

$$X^x Y^y Z^z T^t U^u,$$

donde x es múltiplo no negativo de 3, y y y t son pares no negativos y z y v son enteros no negativos. Es claro que todos esos monomios aparecen en el desarrollo del producto

$$(1 + X^3 + X^6 + \cdots) (1 + Y^2 + Y^4 + \cdots) (1 + Z + Z^2 + \cdots) \\ (1 + T^2 + T^4 + \cdots) (1 + U + U^2 + \cdots).$$

De grado k son aquellos monomios

$$X^x Y^y Z^z T^t U^u, \quad \text{tales que } x + y + z + t + u + v = k.$$

Como sólo interesa contar el número de ellos que aparecen, llamando a todas las variables con un único nombre, digamos x , obtenemos que éstos aparecen en el desarrollo

$$(1 + x^3 + x^6 + \cdots) (1 + y^2 + y^4 + \cdots) (1 + z + z^2 + \cdots) \\ (1 + t^2 + t^4 + \cdots) (1 + u + u^2 + \cdots) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

donde $a(k)$ es el número de monomios de grado total k , es decir, coincide con $p(k)$. Por lo tanto, bastará encontrar el coeficiente k -ésimo del desarrollo de Taylor en torno al cero de la función de la izquierda. En realidad, esto es un ejemplo del uso de una potente técnica conocida como las funciones generatrices, que consiste en asociar a una sucesión infinita de números la

función que obtenemos al sumar la serie de potencias cuyos coeficientes sean los términos de esa sucesión.

En nuestro caso, como la función es un producto de series geométricas, basta buscar el coeficiente k -ésimo de la serie de Taylor de la función

$$G(x) = \frac{1}{(1-x^3)(1-x^2)^2(1-x)^2} = \frac{1}{(1+x+x^2)(1+x)^2(1-x)^5}.$$

Para ello, seguiremos el método de descomposición en fracciones simples, con el objeto de simplificar las cuentas. Planteamos así la siguiente identidad:

$$\frac{1}{(1+x+x^2)(1+x)^2(1-x)^5} = \frac{Ax+B}{1+x+x^2} + \frac{C}{1+x} + \frac{D}{(1+x)^2} + \frac{E}{1-x} + \frac{F}{(1-x)^2} + \frac{G}{(1-x)^3} + \frac{H}{(1-x)^4} + \frac{I}{(1-x)^5}.$$

El sistema lineal de 9 ecuaciones con 9 incógnitas que nos plantea esta identidad, tiene la siguiente solución:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{27} & B &= \frac{1}{27} & C &= \frac{7}{64} \\ D &= \frac{1}{32} & E &= \frac{251}{1728} & F &= \frac{3}{16} \\ G &= \frac{29}{144} & H &= \frac{1}{6} & I &= \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Por otra parte, las funciones involucradas en la parte derecha de la identidad, tienen los siguientes desarrollos de Taylor:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x+x^2} &= \sum_{j \equiv 0(3)} x^j + \sum_{j \equiv 1(3)} -x^j \\ \frac{1}{1+x} &= \sum_{j \equiv 0(2)} x^j + \sum_{j \equiv 1(2)} -x^j \\ \frac{1}{(1+x)^2} &= \sum_{j \equiv 0(2)} (j+1)x^j + \sum_{j \equiv 1(2)} -(j+1)x^j \\ \frac{1}{(1-x)^k} &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+k-1}{k-1} x^j \end{aligned}$$

Así, si denotamos por c_i al coeficiente i -ésimo de la Serie de Taylor

buscada, con $d \equiv i(6)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= B + C + D(d+1) \\
 &\quad + E + F(d+1) + G\binom{d+2}{2} + H\binom{d+3}{3} + I\binom{d+4}{4} \\
 c_1 &= A - B - C - D(d+1) \\
 &\quad + E + F(d+1) + G\binom{d+2}{2} + H\binom{d+3}{3} + I\binom{d+4}{4} \\
 c_2 &= -A + C + D(d+1) \\
 &\quad + E + F(d+1) + G\binom{d+2}{2} + H\binom{d+3}{3} + I\binom{d+4}{4} \\
 c_3 &= B - C - D(d+1) \\
 &\quad + E + F(d+1) + G\binom{d+2}{2} + H\binom{d+3}{3} + I\binom{d+4}{4} \\
 c_4 &= A - B + C + D(d+1) \\
 &\quad + E + F(d+1) + G\binom{d+2}{2} + H\binom{d+3}{3} + I\binom{d+4}{4} \\
 c_5 &= -A - C - D(d+1) \\
 &\quad + E + F(d+1) + G\binom{d+2}{2} + H\binom{d+3}{3} + I\binom{d+4}{4}
 \end{aligned}$$

Un cálculo final da los siguientes resultados para el coeficiente c_i :

$$\begin{aligned}
 C \cdot (d^4 + 18d^3 + 112d^2 + 288d + 288) & \quad d \equiv 0(6) \\
 C \cdot (d^4 + 18d^3 + 112d^2 + 270d + 175) & \quad d \equiv \pm 1(6) \\
 C \cdot (d^4 + 18d^3 + 112d^2 + 288d + 256) & \quad d \equiv \pm 2(6) \\
 C \cdot (d^4 + 18d^3 + 112d^2 + 270d + 207) & \quad d \equiv 3(6)
 \end{aligned}$$

siendo $C = \frac{1}{288}$.

Ejemplo 7 En este caso, necesitamos el desarrollo en Serie de Taylor, centrada en 0, de la función:

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x)^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)^3}.$$

Solución: Análogamente al ejercicio anterior, descomponemos la función en fracciones simples:

$$\frac{1}{(1+x)(1-x)^3} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{(1-x)^2} + \frac{D}{(1-x)^3}.$$

El sistema lineal 4×4 que nos plantea la identidad, tiene como solución:

$$A = \frac{1}{8} \quad B = \frac{1}{8} \quad C = \frac{1}{4} \quad D = \frac{1}{2}.$$

Si denotamos ahora por c_i el coeficiente d -ésimo de la serie de Taylor buscada, con $d \equiv i(2)$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= C' \cdot (d^2 + 4d + 4) \\
 c_1 &= C' \cdot (d^2 + 4d + 3)
 \end{aligned}$$

siendo $C' = \frac{1}{4}$.

Bibliografía

- [ACG] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths y J. Harris, *Geometry of algebraic curves*, Springer Verlag (1985).
- [Be1] A. Bertram, *Towards a Schubert Calculus for maps from a Riemann Surface to a Grassmannian*, Internat. J. Math. 5 (1994), no. 6, 811–825.
- [Be2] A. Bertram, G. Daskalopoulos y R. Wentworth, *Gromov invariants for holomorphic from Riemann surfaces to Grassmannians*, J. Amer. Math. Soc 9 (1996), no. 2, 529–571.
- [B1] A. Białynicki–Birula, *Some theorems on actions of algebraic groups*, Annals of Math, 98 (1987), 480–497.
- [B2] A. Białynicki–Birula, *Some properties of the decomposition of algebraic varieties determined by action of a torus*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., 24 (1976) 9, 667–674.
- [BT] R. Bott y L. Tu, *Differential forms in Algebraic Topology*, GTM 82, Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin (1982)
- [Fu] W. Fulton, *Intersection Theory*, Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin (1984).
- [Gro] A. Grothendieck, *Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV: Les schémas de Hilbert*, séminaire Bourbaki 221 (1960/61).
- [Ha1] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin (1977).
- [Ha2] R. Hartshorne, *Equivalence relations on algebraic cycles and subvarieties of small codimension*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics (A.M.S.), Vol. 29 (1975), 129–164.

- [GH] P. Griffiths y J. Harris, *Principles of algebraic Geometry*, Wiley-Interscience (1984).
- [Lit] S. Iitaka, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin (1981).
- [Mum] D. Mumford, *Lectures on curves on a algebraic surface*, Annals of Math. Studies 59, Princeton Univ. Press, (1966).
- [New] P.E. Newstead, *Introduction to moduli problems and orbit spaces*, TIFR Lecture Notes 51 (1978) Tata Inst. of Fund. Research, Bombay, and Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin.
- [RRW] M.S. Ravi, J. Rosenthal, X. Wang, *Degree of the generalized Plücker embedding of a Quot scheme and Quantum cohomology*, Preprint (1993).
- [MB] S. Mac Lane, G. Birkhoff, *Algebra*. The Mac Millan Company (1967).
- [Ses] C.S. Seshadri, *Fibrés Vectoriels sur les Courbes Algébriques*, Astérisque 96 (1982).
- [Str] S.A. Strømme, *On parametrized rational curves in Grassmann varieties*, Lectures Notes in Math, 1266 (1987), 251-272.
- [Xam] S. Xambó Descamps, *Using intersection theory*, Preprint, MA2-IR-93-009 (199-).
- [Vie] E. Viehweg, *Quasi-projective Moduli for Polarized Manifolds*, Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin (1995).

Requisito de idioma: I que suscribe en el uso
de I. apto cum laude presente Tesi
doctoral. 31 de mayo de 1998

MADRID, uno de Octubre de 1998

4-17

U. Garcia - Preda.

Tom A. Wavarr

E. A. ...

[Signature]